

İçbükey İletken Bir Yüzeyin Kenarından Kırınan Elektromagnetik Dalgaların Fiziksel Optik Yaklaşımıyla Asimptotik Hesabı

Uğur YALÇIN
Uludağ Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Görükle-BURSA
uyalcin@uludag.edu.tr

Özet: Bu çalışmada, sonlu kaynaklı elektromagnetik dalgaların içbükey iletken silindirik bir yüzeyden optik gibi saçılması olayı Fiziksel Optik (FO) yaklaşımı ile incelenmiştir. Sonlu kaynak olarak, elektrik çizgisel akım kaynağı seçilmiş ve bu kaynağın alanında bulunan, içbükey iletken silindirik yüzeyin köşesinden kırınan alana ait saçılma integrali tanımlanmıştır. Neticede, bu integral asimptotik olarak değerlendirilerek kırınan alan ifadesi üniform olarak elde edilmiş ve yüzeye ait köşe kırınım katsayısı bulunmuştur. Ayrıca, FO yaklaşımıyla bulunan yüzeye ait köşe kırınım katsayısıyla önceki çalışmalarda Hilbert Yöntemi (Kesin Çözüm) ile elde edilmiş olan aynı yüzeye ait tam köşe kırınım katsayısı çeşitli simülasyonlarla karşılaştırılmıştır. FO köşe kırınım katsayısıyla tam köşe kırınım katsayısının değişimleri de karşılaştırılmalı olarak verilmiştir.

1. Giriş

Günümüzde cep telefonları, radar uygulamaları ve antenlerin tekniği gibi araştırma konularında uygulama alanı bulunan kırınım problemleri mühendislik açısından büyük önem taşımaktadır. Bununla birlikte, elektromagnetik teori tabanlı kırınım problemlerinin analizlerinde belirli frekans sınırlamaları altında çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Frekansın belli bir değerden küçük olduğu durumlarda nümerik çözüm yöntemleri, daha yüksek olduğu durumlarda ise asimptotik çözüm yöntemleri ön plana çıkmaktadır[1]. Yüksek frekanslarda Finite Element Method” (FEM), “Moment Method” (MoM), FDTD vb. nümerik metotlar kullanılırken, λ dalga boyu, saçıcı cismin boyutlarına göre çok küçük kalmakta ve seçilecek yüzey elemanlarının sayısı artmakta ve boyutları küçülmektedir. Neticede, ilgili metotların belli bir değerden yüksek frekanslarda kırınım problemlerinin incelenmesinde kullanılması güç olmaktadır[1][2]. Yüksek frekanslarda etkin bir çözüm yapabilmek için, asimptotik analiz yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir. Özellikle saçıcı yüzey sayısının birden fazla olduğu durumlarda problemin çözümü için kullanılacak en etkin yöntemler asimptotik çözüm yöntemleridir.

2. Fiziksel Optik Yaklaşımı

FO yaklaşımı, küre ve silindir gibi benzer saçıcı cisimlerden saçılan alan hesabın da uygulama ve pratiklik açısından sıklıkla kullanılmaktadır. Bu yaklaşıma göre, mükemmel iletken saçıcı bir yüzeye ait akım yoğunluğu, alanında bulunduğu kaynağa ait akım yoğunluğunun iki katı olmaktadır. Neticede FO yüzey akımı,

$$\vec{J}_{es}(\vec{r}') = 2(\vec{n} \times \vec{H}_0)|_s$$

olarak ifade edilebilir. Bu yüzeyden saçılan alan için elektrik Hertz vektörüne ait Helmholtz denkleminin ikinci skaler Green teoremi yardımıyla elde edilen bir çözümü, Green fonksiyonu

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad R = \|\vec{R}\| = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$$

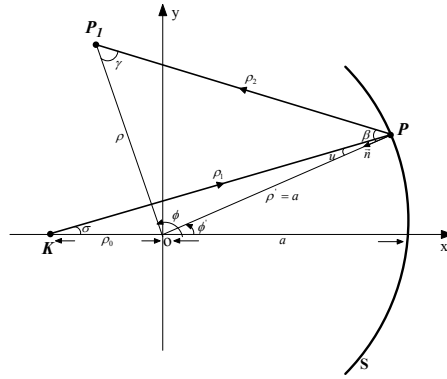
olmak üzere,

$$\vec{\pi}_e = \frac{1}{2\pi j \omega \epsilon_0} \iint_s (\vec{n} \times \vec{H}_0)|_s G(\vec{r}, \vec{r}') ds' \quad (1)$$

şeklinde verilebilir. (1) eşitliğinden faydalanılarak yöresel bir yüzeye ait saçılan alan ifadeleri elde edilebilir.

3. İçbükey İletken Yüzeye Ait Saçılma İntegralinin Hesabı

Bu kısımda z eksenine paralel, ($\rho = \rho_0$, $\phi = \pi$, z) koordinatlarındaki elektrik çizgisel akım kaynağının alanında bulunan, içbükey iletken silindirik yüzeye ait saçılma integrali FO yaklaşımıyla bulunacaktır.



Şekil 1 Kaynak ve silindirik yüzeyin xy düzlemindeki kesiti

Şekil 1'de probleme ait ilgili geometri verilmiştir. Elektrik çizgisel akım kaynağına ait vektör potansiyeli, yeni koordinatlar sisteminde Şekil 1'den faydalanılarak

$$A_{z1} = \frac{\mu_0 I}{4j} H_0^{(2)}(k\rho_1), \quad \rho_1 = [\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho'\rho_0 \cos\phi']^{1/2} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilir[4]. Hankel fonksiyonunun $k \rightarrow \infty$ için Debye asimptotik açılımı[3] ve yeni koordinatlar sistemi gözönüne alındığında, silindirik yüzeye gelen toplam magnetik alan bileşeni

$$\vec{H}_0 \approx \vec{e}_\phi \frac{\omega\mu_0 I}{4Z_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-jk\rho_1 + j\pi/4}}{\sqrt{k\rho_1}} = H_0 \sin u \vec{e}_\rho + H_0 \cos u \vec{e}_\phi \quad (3)$$

olarak ifade edilebilir. Burada Green fonksiyonuna ait

$$R = [(\rho_2)^2 + (z - z')^2]^{1/2}, \quad \rho_2 = [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')]^{1/2}$$

şeklinde verilebilir[4]. Green fonksiyonu ise

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - \eta^2} \rho_2) e^{-j\eta(z-z')} d\eta \quad (4)$$

olarak yazılabilir[5]. Silindirik yüzeyin kutupsal denklemi, normal birim vektörü ve yüzey elemanı ifadesi

$$\rho' = a, \quad \vec{n} = -\vec{e}_\rho, \quad ds' = a d\phi' dz' \quad (5)$$

şeklinde olmak üzere, (1) ile verilen FO integralinde, yüzeyin normal vektörü ile yüzeye gelen toplam magnetik alan bileşeninin vektörel çarpımı, Green fonksiyonu (4), yüzey elemanı ifadesi yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\vec{\pi}_e = -\frac{\vec{e}_z a}{2\pi\eta\omega\epsilon_0} \int_{\phi'=-\phi_0}^{\phi_0} \int_{z'=-\infty}^{\infty} H_0 \cos u \left[\frac{1}{2j} \int_{\eta=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - \eta^2} \rho_2) e^{-j\eta(z-z')} d\eta \right] d\phi' dz' \quad (6)$$

eşitliği elde edilebilir. Bu integral ifadesinde önce z' katı, sonra η katıda hesap edilip, Hankel fonksiyonunun $k \rightarrow \infty$ için Debye asimptotik açılımı[3] eşitlikte yerine yazılır, eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\vec{\pi}_e = \vec{e}_z \frac{jZ_0 I}{4k\pi} \int_{\phi'=-\phi_0}^{\phi_0} \cos u \frac{e^{-jk(\rho_1 + \rho_2)}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} a d\phi' \quad (7)$$

ifadesi elde edilebilir. (7)'den silindirik yüzeye ait saçılma integrali, integrale ait genlik ve faz fonksiyonları

$$I_S = \int_{\phi'=-\phi_0}^{\phi_0} f(\phi') e^{-jk\psi(\phi')} d\phi' \quad (8)$$

$$f(\phi') = \frac{a \cos u}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}, \quad \psi(\phi') = \rho_1 + \rho_2$$

şeklinde yazılabilir.

4. İçbükey İletken Yüze Ait Faz Fonksiyonunun Birinci Türevinin Hesabı

Bu kısımda içbükey iletken silindirik yüzeye ait faz fonksiyonunun birinci türevi hesaplanacaktır. Bunun için (8) eşitliğinde görülen, faz fonksiyonu farklı bir şekilde ifade edilecektir. Şekil 1'deki geometriden faydalanılarak

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \rho_0 \cos \sigma + a \cos u \\ \rho_2 = \rho \cos \gamma + a \cos \beta \end{array} \right\} -a \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma + u + \phi - \phi' = \pi \\ \gamma + \phi - \phi' + \beta = \pi \end{array} \right\} -b \quad (9)$$

eşitlikleri yazılabilir. (9a) eşitlikleri kullanılarak faz fonksiyonu yazılır ve bu fonksiyonun birinci türevi alınır

$$\psi'(\phi') = -\rho_0 \sin \sigma \frac{d\sigma}{d\phi'} - a \sin u \frac{du}{d\phi'} - \rho \sin \gamma \frac{d\gamma}{d\phi'} - a \sin \beta \frac{d\beta}{d\phi'} \quad (10)$$

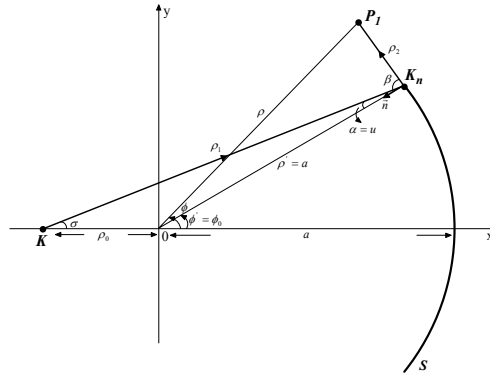
ifadesi elde edilebilir. (9b) eşitlikleri ϕ' 'ne göre kısmi olarak türevlenir ve yine aynı geometriden faydalanarak iki ayrı üçgene sinüs teoremi uygulanıp elde edilen ifadeler, (10) ifadesinde kullanılarak eşitlik düzenlenirse

$$\psi'(\phi') = -a(\sin u + \sin \beta) \quad (11)$$

şeklinde faz fonksiyonunun birinci türevine ait ifadesi bulunabilir.

5. Kırınım Alanlarının Asimptotik Hesabı

Bu kısımda, içbükey yüzeyin köşesinden kırınan alanlar, (8) integralinin asimptotik hesabı yapılarak bulunacak ve yüzeye ait köşe kırınım katsayısı hesaplanacaktır. Şekil 2'deki köşe kırınım geometrisini gözönüne alalım.



Şekil 2 Köşe kırınım alanına ait geometri

Şekil 2 de β köşeden kırınan alanın, α ise yüzeye gelen alanın yüzeyin normal vektörü ile yaptığı köşe açıları ve $\phi' = \phi_0 = sbt$ ise odak noktasına göre köşe noktasını belirleyen açıdır. (8) integral ifadesi stasyoneryazılım yöntemi ile asimptotik olarak değerlendirilirse $U \gg 1$ koşulu altında

$$I_{\phi_0} \approx -\frac{1}{jk} \frac{f(\phi_0)}{\psi'(\phi_0)} e^{-jk\psi(\phi_0)} \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir[6]. Bu ifadede görülen genlik ve faz fonksiyonlarının köşe noktasındaki değerleri

$$\alpha = u, \quad l_0 = \rho_1|_s, \quad l_1 = \rho_2|_s$$

olmak üzere

$$f(\phi_0) = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{l_0 l_1}}, \quad \psi(\phi_0) = l_0 + l_1 \quad (13)$$

şeklinde ifade edilebilir. (12) ifadesinde görülen faz fonksiyonunun birinci türevinin köşe noktasındaki değeri (11) eşitliğinden faydalanılarak

$$\psi'(\phi_0) = -a[\sin \alpha + \sin \beta] \quad (14)$$

olarak yazılabilir. Sonuçta, (12) ifadesinde genlik fonksiyonu, faz fonksiyonu ve birinci türevinin köşe noktasındaki değerleri yerine yazılıp, temel bir takım işlemler sonucunda

$$\vec{E}_{FO}^{kir} \approx k^2 \pi \vec{e}_z = -\vec{e}_z \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{Z_0 I \sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta} \frac{e^{-jk(l_0+l_1)+j\pi/4}}{\sqrt{l_0 l_1}} \quad (15)$$

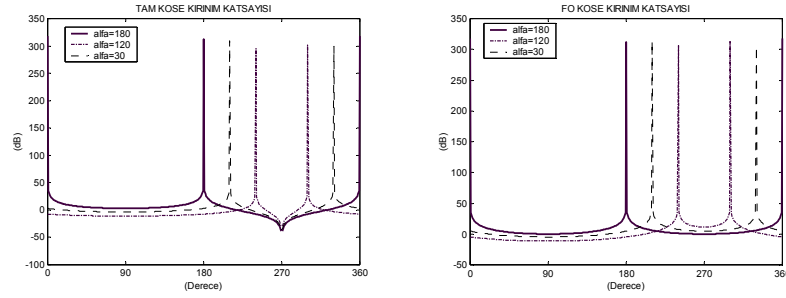
kırınan alan ifadesi GO alanları olarak elde edilebilir. Köşe kırınım katsayısı ise

$$D_k^{(FO)}(\beta) = -\frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta} \quad (16)$$

şeklinde α ve β açıları cinsinden bulunabilir.

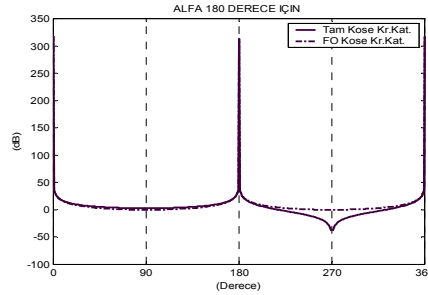
6. Tartışma Ve Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda FO yaklaşımıyla elde edilen yüzeye ait köşe kırınım katsayısıyla (16), Hilbert Yöntemiyle hesaplanan aynı yüzeye ait tam köşe kırınım katsayısı[7] simülasyonlarla karşılaştırılacaktır.



Şekil 3 $\alpha = 30^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ için tam ve FO köşe kırınım katsayılarının β ile değişimleri

Eğriler mutlak değerlerinin logaritmaları alınarak çizdirilmiştir[8]. Şekil 3'de tam ve FO köşe kırınım katsayılarının, α parametre alınarak, β ile değişimleri verilmiştir. Tam katsayı için $\beta, 270^\circ$ değerinde alanın sıfır olduğu, FO katsayısı içinse alanın sıfırdan farklı bir değeri olduğu gözlenmektedir. Ayrıca yansıma ve gölge sınırlarına ait geçiş bölgelerinde çeşitli α değerleri için de görülmektedir.



Şekil 4 $\alpha = 180^\circ$ için Tam ve FO köşe kırınım katsayılarının karşılaştırılması

Şekil 4 de $\alpha, 180^\circ$ için tam ve FO köşe kırınım katsayılarının bir karşılaştırması verilmiştir. İlgili şekilden de görülebileceği üzere tam köşe kırınım katsayısı ile FO köşe kırınım katsayıları arasında büyük bir fark görülmemektedir. FO yaklaşımı ile elde edilen çözümler yaklaşık olmasına rağmen, alanın davranışı hakkında kesin çözüm kadar yeterli veriyi içermektedir.

7. Sonuçlar

Bu çalışmada, sonlu kaynaklı elektromagnetik dalgaların içbükey iletken silindirik bir yüzeyden optik gibi saçılması olayı incelenmiştir. Meydana gelen köşe kırınım alanları FO yaklaşımıyla bulunmuş ve köşe kırınım katsayısı hesaplanmıştır. Sonuç olarak, FO yaklaşımıyla asimptotik olarak hesaplanan yüzeye ait köşe kırınım katsayısı ile kesin çözümle (Hilbert Yöntemi) hesaplanan aynı yüzeye ait köşe kırınım katsayısı çeşitli simülasyonlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen eğrilerden, özellikle geçiş bölgelerinde alanın davranışına ilişkin bilgiler elde edilmiştir.

Kaynaklar

- [1] Stutzman W. L. ve Thiele G. A., Antenna Theory and Design. John Wiley&Sons, Inc., New York 1998.
- [2] Ishimaru A., Electromagnetic Wave Propagation. Radiation and Scattering. Prent. Hall, New Jersey 1991.
- [3] Bayrakçı H. E., Lineer Sistemlerin Mühendislik Matematiği. Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 1991.
- [4] Bayrakçı H. E., Elektromagnetik Dalga Teorisi. Birsen Yayınevi, İstanbul, 2001.
- [5] Harrington R. F., Time-Harmonic Electromagnetic Fields. McGraw-Hill Co., New York, 1961.
- [6] James G. L., Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves. IEE Peter Peregrinus Ltd., London, 1976.
- [7] Uzgören G., Bir Çizgisel Kaynağın Yarattığı Dalgaların Bir Silindirik Reflektörden Saçılması. Doktora Tezi, İTÜ, İstanbul, 1982.
- [8] Uzgören G. ve Büyükaksoy A., Kırınım Problemleri. GYTE Yayınları No:4, Gebze, 1999.