EŞLENİK GRADYAN METODU İLE TEK BOYUTLU ARAZİ KESİTLERİNDE DALGA YAYILIMI

Barış Babaoğlu, Ayhan Altıntaş, Vakur B. Ertürk

Bilkent Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent, Ankara – Türkiye
baris@ee.bilkent.edu.tr,altintas@ ee.bilkent.edu.tr,vakur@ ee.bilkent.edu.tr

Özet: *Tek boyutlu pürüzlü yüzeylerin saçınım hesaplamalarında, moment metodun (MoM) iteratif yöntemlerle birlikte kullanılması, elde edilen sonuçların doğru ve güvenilir olması bakımından oldukça popüler bir yaklaşımdır. Ancak moment metot entegral denklemlerinden elde edilen dizilerin bellek gereksinimi ve hesaplama zamanının uzun olması, bu tip yöntemlerin kullanımını zorlaştırmaktadır. Durağan (stationary) iteratif metotlar yerine derece derece değişebilen (nonstationary -gradyan) uygulamarın bulunması ile bu sorunların da üstesinden gelinmiştir. Derece derece değişebilen metotların durağan metotlardan temel üstünlüğü, yakınsamanın daha hızlı olmasıdır. Özellikle eş zamanlı denklem sayısının fazla olduğu elektromanyetik problemlerde, gradyan tipi yöntemler oldukça kullanışlıdır. Bu uygulamalardan biri olan eşlenik gradyan metodu, yuvarlama hatalarını çözüm yolunun en son basamağında sınırlamakta, kesin çözüme direkt metoda göre çok daha kısa sürede, sonlu sayıda iterasyon dahilinde yakınsamaktadır.*

I. Giriş

Elektromanyetik saçınım analizlerinde genel olarak kullanılan Elektrik ve Manyetik alan entegral eşitliklerindeki bilinmeyen akımları bulmak oldukça zordur. Bu tip eşitliklerin genel çözümü için (MoM) yaklaşımı kullanılabilir [1]. Bu metot, bilinmeyen terimi bilinen açılım (expansion) fonksiyonları ile açarak tanımlamakta ve bu fonksiyonların katsayılarını bilinmeyen olarak atamaktadır. Bu işlem, entegral operatör eşitliğini matris eşitliğine çevirmekte, yani nümerik olarak daha kolay bir denklem boyutuna indirgemektedir. Böylece bilinmeyen katsayılar matris denkleminin çözümünden ortaya çıkmaktadır. Metodun uygulanması kolay olmasına karşın, problemin boyutlarında artış gözlendiğinde monoton bir yakınsama garantilenememektedir. Nümerik iteratif yaklaşımlardan eşlenik gradyan yöntemi ile çoğu zaman monoton yakınsama gözlenebilmektedir.

Bu tip entegral eşitliklerinin çözümünde kullanılacak nümerik tekniklerin hesaplama algoritmalarının aşağıdaki gibi özellikler göstermesi beklenir [2] :

1. Metot basit olmalıdır.
2. Metot hızlı yakınsama sağlamalıdır.
3. Yöntem yuvarlama hatalarına karşın sağlam kalmalıdır.
4. İterasyon sırasında her basamak çözüm hakkında bilgi vermeli ve bir öncekine göre daha iyi tahmin yapmalıdır.
5. Her basamakta mümkün olduğu kadar çok orijinal veri kullanılmalıdır.

Bu çalışmada sonsuz uzunlukta ve belirli genişlikte mükemmel elektrik iletken (PEC) levhanın TM düzlem dalgalarıyla aydınlanması sonucu endüklenen akımın Eşlenik Gradyan yöntemi ile bulunmasına çalışılmıştır. Çeşitli genişlikteki levhalar için saçınım hesapları bu metot ile yapılmıştır.

II. 2 Boyutlu EFIE Saçınım problemi için Eşlenik Gradyan metodu

Bu bölümde Eşlenik Gradyan (CG) metodu, elektrik alan entegral eşitliği (EFIE) ile başlayıp MoM kullanılarak ayrıştırma sürecinin uygulandığı ve buna karşılık gelen matris denklemlerinin iteratif bir yöntemle çözüldüğü bir formülasyon ile, kısaca ele alınmıştır. Burada EFIE, teğet elektrik alan sınır koşullarının PEC saçındırıcı yüzey üzerinde uygulanması sonucu elde edilebilir. Buna göre genel TM düzlem dalga durumu için elektrik alan entegral denklemi şu şekilde ifade edilebilir [3]:

$$- \omega\mu \int_S J(\rho') H_0^{(2)}(\kappa|\rho - \rho'|)\, ds' = -4 E^i(\rho) \qquad (1)$$

Burada S saçındırıcı yüzeyi, $E^i(\rho)$ $\rho \in$ S noktasındaki gelen alanı, $J(\rho')$ indüklenen akımı, ve $H_0^{(2)}(\kappa|\rho - \rho'|)$ ikinci tür sıfır derece Hankel fonksiyonu göstermektedir. S yüzeyi belli bir yönde eksi sonsuz ve artı sonsuz arasında uzanmasına rağmen gelen elektrik alanın yüzey üzerinde incelmesi, (1) entegralini L uzunluğunda bir bölgede sınırlandırmaktadır. Bu entegral denklemi MoM tekniği kullanılarak ayrıştırılabilir. Basit bir formülasyon için N darbe-temelli (pulse- basis) fonksiyonlar kullanmak ve her akım elemanının orta noktasını nokta-uydurma (point - matching) tekniği ile etkileştirmek düşünülürse, (1) aşağıdaki gibi matris eşitliğine dönüşür:

$$\bar{\boldsymbol{Z}} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{V} \qquad (2)$$

Burada $\bar{\boldsymbol{Z}}$ karşılıklı empedans matristir. Elemanları da şu şekilde verilebilir [4] :

$$z_{mn} = \omega\mu / 4 \int_{L_n} P_n(\rho') H_0^{(2)}(\kappa|\rho_m - \rho'|)\, d\rho' \qquad \rho' \square\ L_n \qquad (3)$$

$P_n(\rho')$, ρ_n noktasının merkez olarak alındığı birim darbe fonksiyonudur. Çözüm aşamasında darbe genişliği $\square$ / 10 olarak verilmiştir. ρ_m saçıcı düzlem üzerideki herhangi bir gözlem noktası, ρ' ise saçıcı üzerindeki herhangi bir kaynak noktasıdır. ***I***, bilinmeyen katsayıları içeren sütun vektörüdür. $\boldsymbol{I}$ = { I_n | n = 1,.....,N } indüklenen akımı yaklaşık olarak gösterebilmek için kullanılabilir :

$$J(\rho') \approx \sum_{n=1}^{N} I_n P_n(\rho') \qquad (4)$$

Son olarak (2) eşitliğindeki ***V*** sütun vektörü uyarım vektörüdür. Bu vektör gelen elektrik alanın levha üzerindeki uyum noktalarındaki değerlerinin sınır koşullarına uygulanması sonucu oluşturulur:

$$V_m = -E^i(\rho_m) \qquad (5)$$

CG metodu simetrik pozitif / negatif tanımlı sistemler için kullanılan bir iteratif yöntemdir. CG yöntemi kesin çözüme, tekrarlı vektör dizilerini ve bu tekrarlı vektörlere bağlı olan artık vektörlerini ve de bu tekrar ve artık vektörlerini güncellemeye yarayan arama yönlerini oluşturarak çalışır. Bu dizilerin uzunlukları fazla olmasına karşın sadece küçük sayıda vektör hafızada tutulmaktadır. Her bir iterasyonda, belirli dikeylik koşullarını sağlamak amacıyla tanımlanan güncelleme sabitleri hesaplanması için, iki iç çarpım yapılmaktadır. (2) eşitliğindeki matris'in de mütekabiliyet özelliğine (reciprocity) göre simetrik çıkmasından dolayı bu yöntemin uygulanabilirliği artmaktadır. Ancak daha ileride yapılacak calismalar dusunuldugunde matrisin her zaman simetri özelliğini sağlayamaması durumu da göz önünde bulundurulmuştur. Böyle durumlarda CG yönteminin alternatif bir yolu olan Bi-Eşlenik Gradyan (BiCG) metodu kullanılabilir. Bu yöntem CG 'den farklı olarak birbirlerine dik olan artık vektor dizisi yerine birbirlerine karşılıklı olarak dik olan iki ayrık dizi oluşturmaktadır. Tabi bu durum da bazı dezavantajları beraberinde getirmektedir. Simetrik matris durumunda BiCG, CG ile aynı sonuçları bulmasına karşın her iterasyonda daha fazla işlem yapmaktadır. Fakat yakınsama hızını arttıracak yöntemler geliştirilmiştir [5] . Buna göre $\boldsymbol{r_k}$ artık vektörü, $\boldsymbol{p_k}$ yon vektörü, $\boldsymbol{x_k}$ kesin çözüme yakınsayan vektör, ve de ε tolerans olmak üzere (2) eşitliğini çözmek için kullanılacak olan algoritma şu şekilde verilebilir [6] :

Başla:

- *Seç* $\boldsymbol{x_0} \in C^n$ (6)
- $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x_0}$ ***ve*** $\boldsymbol{r_0^{\sim}} = \boldsymbol{r_0}$ (7)

Yap :

- k=1,2,......, devam et
- $\rho_{k-1} = \boldsymbol{r_{k-1}}^T \boldsymbol{r^{\sim}_{k-1}}$; (8)
- eğer $\rho_{k-1} = 0$ ise metot çalışmaz (9)
- eğer k = 1 ise (10)

$\boldsymbol{p_{k-1}} = \boldsymbol{r_{k-1}}$;

$\boldsymbol{\tilde{p}_{k-1}} = \boldsymbol{\tilde{r}_{k-1}}$; (11)

yoksa

$\beta_{k-1} = \rho_{k-1} / \rho_{k-2}$; (12)

$\boldsymbol{p_k} = \boldsymbol{r_{k-1}} + \beta_{k-1}\boldsymbol{p_{k-1}}$; (13)

$\boldsymbol{\tilde{p}_k} = \boldsymbol{\tilde{r}_{k-1}} + \beta_{k-1}\boldsymbol{\tilde{p}_{k-1}}$; (14)

- $\boldsymbol{q_k} = \boldsymbol{Zp_k}$ (15)
- $\boldsymbol{\tilde{q}_k} = \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{\tilde{p}_k}$ (16)
- $\alpha_k = \rho_{k-1} / \boldsymbol{\tilde{p}_k}^T \boldsymbol{q_k}$; (17)
- $\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{x_{k-1}} + \alpha_k \boldsymbol{p_k}$; (18)
- $\boldsymbol{r_k} = \boldsymbol{r_{k-1}} - \alpha_k \boldsymbol{q_k}$; (19)
- $\boldsymbol{\tilde{r}_k} = \boldsymbol{\tilde{r}_{k-1}} - \alpha_k \boldsymbol{q_k}$; (20)
- yakınsama için kontrol et : eğer $\|\boldsymbol{r_k}\|^2 < \varepsilon$; **Dur** (21)

III. Nümerik Sonuçlar

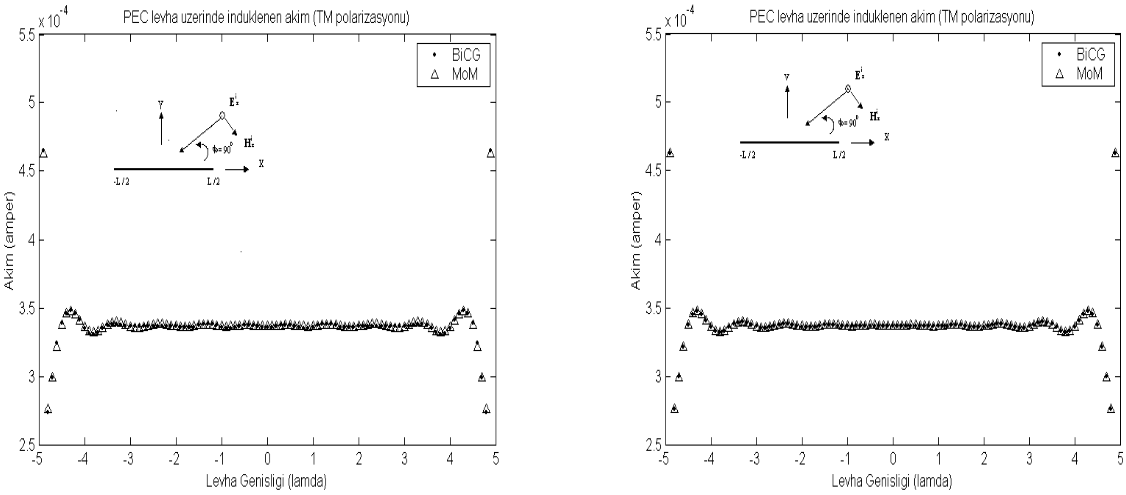
Bu bölümde BiCG metodunun yakınsama kabiliyetini gösterebilmek amacıyla bazı sonuçlara yer verilmiştir. Yakınsamayı gözlemlemek amacıyla artık hatası kullanılmıştır. k'ıncı iterasyon sonucunda artık hata vektörü :

$$\boldsymbol{r_k} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{\bar{Z}x_k} \tag{22}$$

seklinde tanımlanmıştır. Ve de artık hatası da;

$$\|\, \boldsymbol{r_k} \,\| \,/\, \|\, \boldsymbol{V} \,\| \tag{23}$$

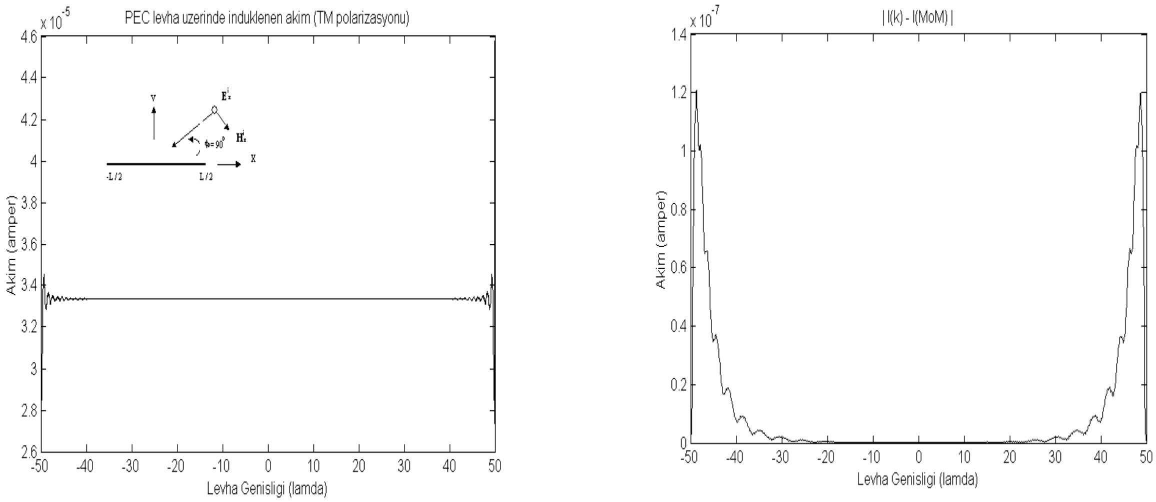
olarak bulunur $\|r_k\|$ vektör norm' udur. Sekil 1a.'da x düzlemi boyunca yerleştirilmiş 10 □ uzunluğundaki PEC levha, z yönünde polarize olmuş düzlem dalga tarafından aydınlatılmaktadır. Levha 100 kısma ayrılmıştır. MoM uygulanarak elde edilen empedans matrisinin boyu 100*100 olacaktır. BiCG metodunun uygulanması sonucu ε = 1e-3 verilerek 9. iterasyonda 7.58e-3'lük bir artık hata ile referans MoM artık vektörüne yakınsama sağlanmıştır. Sekil 1b.'de ε = 1e-4 olarak tanımlandığında 14. iterasyon sonunda 7.21e-4'lük artık hata ile sonuca ulaşılmıştır.



(a) (b)

Şekil 1: 10 □ uzunluğunda PEC levha

Şekil 2a.' da ise 100 □ uzunluğundaki levha 1000 parçaya ayrılmıştır ($\mathbf{Z}_{MoM}$= 1000*1000). BiCG uygulanmasıyla 37 iterasyon sonunda 7.58e-4'lük artık hata yakınsama sağlanmıştır. (ε = 1e-4). Iterasyon sonucunda akımlar üst üste bindiği için Şekil 2b'de referans MoM akımı ile aradaki farkın büyüklüğü çizilmiştir.



(a) (b)

Şekil 2: 100 □ uzunluğunda PEC levha

IV Sonuçlar :

Bu çalışmada geniş doğrusal sistemlerin çözülebilmesi için alternatif bir hesaplama algoritması anlatılmıştır. Simetrik olmayan matrisler için de yakınsama sağlayabilen BiCG metodunu iki boyutlu saçınım problemine uygulanmış, ve de sonlu sayıda iterasyon dahilinde doğru sonuca ulaştığı gösterilmiştir. BiCG simetrik matris olmasına durumunda CG'ye göre iki kat fazla işlem yapmasına rağmen, metodu hızlandıracak değişik yöntemler mevcuttur. Bunlardan biri önkoşullama (preconditioning) tekniğidir. Buradaki temel amaç direkt doğrusal sistem denklemini olan Ax=b'yi çözmek yerine $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ eşitliğiyle uğraşmaktır. Bazı durumlarda ikinci sistemi çözmek yakınsama hızını arttırmaktadır. Önkoşullama değişik şekillerde yapılabilir. Tamamlanmamış Cholesky Etkenlerine Ayırma tekniği (ICF) [7] bunlardan birisidir. Ayrıca BiCG'nin modifiye edilmiş versiyonları olan Bi-Eşlenik Gradyan (BiCGSTAB) ve Eşlenik Gradyan Kare (CGS) algoritmaları da hem ıraksama problemlerinin üstesinden gelmekte hem de yakınsamayı hızlandırmaktadırlar [6]. Bu gibi iteratif metotlar daha sonra yapılacak tek boyutlu arazi kesitlerinde dalga yayılımı analizlerinde ayrıntılı olarak ele alınacak ve metotların yakınsama hızını arttıracak algoritmalar incelenecektir.

Kaynaklar :

[1]. Sadiku M. N. O, Numerical Techniques in Electromagnetics , CRC Press LLC, Florida, A.B.D., 2001

[2]. Sarkar K. T. ve Sadasiva M. R.," The Application of Congradient Type method for the Solution of Electromagnetic Scattering from Arbitrarily Oriented Wire Antennas ", IEEE Trans. On Antennas and Propagation, 32(4), s.398-403, Nisan 1984

[3]. Pino M.R., Landesa L., Rodrigez J. L., Obelleiro F. ve Burkholder R. J., " The Generilized FB metohd for Analyzing the Scattering form Targets on Ocean-Like Rough Surfaces ", IEEE Trans. On Antennas and Propagation,47(6), s. 961-969, Temmuz 1999

[4]. Bancoft R.,Undrerstanding Electromagnetic Scattering Using the Method of Moments, Artec House,Boston, A.B.D., 1996

[5] Chou H. T., Johnson J.T.," Novel Acceleration Algorithm ", Radio Science,33(5),s.1277-1287,1998

[6]. Barrett R.,Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J. M., Dongarra J., Eijkhout V., Roldan P., Romine C., ve Vorst H. V.," Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods ", SIAM, Philadelphia PA, A.B.D,1994

[7] .Datta B. N., " Numerical Linear Algebra and Applicaitons ", Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, A.B.D., 1995