

Elektromanyetik Sınır Değer Problemlerinin İkinci Dereceden Altı Yüzlü Sonlu Elemanlar İle Modellenmesi

A. Egemen YILMAZ, Mustafa KUZUOĞLU
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
06520, Ankara

ayilmaz@havelsan.com.tr, kuzuoglu@metu.edu.tr

Özet: Elektromanyetik sınır değer problemleri arasında önemli bir yer tutan açık bölge saçılma problemlerinin, ikinci dereceden eş parametrelili altı yüzlü kenar elemanları ile çözümü bu çalışmanın esasını oluşturmaktadır. Maxwell denklemlerinin kısmi diferansiyel formu temel alınmakta; elektrik alan zayıf formda temsil edilmektedir. Çözüm bölgesi dahilinde problem geometrisine uygun bir ağ üretilerek altı yüzlü elemanlar oluşturulmakta; elektrik alan her bir elemanda Galerkin Yöntemi ile tanımlanmış olan baz fonksiyonlar cinsinden ifade edilmektedir. Bu çalışma kapsamında ağ sonlandırımı işlevini yerine getirmek üzere karmaşık koordinat dönüşümü ile gerçekleştirilmiş olan Tamamen Eşlenmiş Katmanlar kullanılmaktadır. Geliştirilen yöntem, çeşitli cisimlerin Radar Ara Kesiti hesaplamaları gibi pratik problemlerde uygulanmıştır.

1. Giriş

Elektromanyetik sınır değer problemlerinin, genel olarak açık bölge saçılma veya ışınma problemleri olarak gruplandırılması mümkündür. Bu problemlerde, yalnız belirli geometriler için analitik çözüm bulmak mümkün olmaktadır. Analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda ise, nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemler arasında Sonlu Elemanlar Yöntemi, esas olarak mekanik problemleri için geliştirilmiş olup 1940'lı yıllarda Courant tarafından elektromanyetik problemlere uyarlanmıştır [1].

Sonlu Elemanlar Yöntemi, isminden de anlaşılacağı üzere problemin tanımlandığı bölgenin küçük parçalara bölünmesi ve bilinmeyen fonksiyonun bu küçük parçalar üzerinde çeşitli baz fonksiyonlarla ifade edilmesi temeline dayanır. Yöntem, homojen olmayan karmaşık cisimlerin modellenmesinde başarılı olmasına karşın, elektrik alanın çok büyük değerler alabildiği cisim köşe ve uç bölgelerinde aynı başarılı sonuçları verememektedir. Yöntemin bir diğer özelliği de, problemi ifade eden denklemdeki matrisin seyrek bir matris olmasıdır. Bu sayede, bellek kullanımı ve matris çözümü verimli bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Bu çalışmada Bentley'in Satır Endeksli Seyrek Matris Depolama Yöntemi [2] ve çözüm için de Çift Eşlenikli Gradyan Yöntemi seçilmiştir [3].

Sonlu Elemanlar Yöntemi, doğası gereği açık bölge problemlerinde doğrudan kullanılmak için uygun değildir. Yöntemin açık bölge problemlerine uygulanması için literatürde değişik yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemler arasında Berenger'in önerdiği Tamamen Eşlenmiş Katmanlar (PML) yöntemi [4], ilgili frekanstaki bir elektromanyetik dalgayı yansıtmayan kuramsal bir cisim vasıtasıyla uzak bölgelerin modellenmesi prensibine dayanır. Bu çalışmada Tamamen Eşlenmiş Katmanlar, karmaşık koordinat dönüşümü [5] ile modellenmiştir.

2. Elektrik Alan Formülasyonu

En genel haliyle üç boyutlu bir elektromanyetik saçılma problemi, herhangi bir polarizasyon ve frekanstaki bir elektromanyetik dalganın ($\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}$), Ω_{int} hacmini kaplayan herhangi özellikteki bir cisim üzerine etki etmesi olarak tanımlanabilir. Cismin dışında kalan hacim Ω_{ext} olarak tanımlandığında, problemin tanımlandığı uzay $\Omega = \Omega_{\text{int}} \cup \Omega_{\text{ext}}$ olarak ifade edilebilir. Cismin yüzeyi de $S(\Omega)$ olarak gösterilebilir. Toplam elektrik ve manyetik alanlar ($\mathbf{E}^{\text{tot}}, \mathbf{H}^{\text{tot}}$) için yazılan Maxwell denklemlerinden, $S(\Omega)$ üzerindeki sınır değerleri belli olan

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{tot}} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}^{\text{tot}} = 0 \quad (1)$$

şeklindeki dalga denklemi elde edilebilir. Toplam elektrik ve manyetik alanlar ile kastedilen, cisim üzerinde etki eden ve cisimden yansıyan alanların toplamıdır (Bir başka deyişle, $\mathbf{E}^{\text{tot}} = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{sct}}$ and $\mathbf{H}^{\text{tot}} = \mathbf{H}^{\text{inc}} + \mathbf{H}^{\text{sct}}$ olarak ifade edilebilir). Denklemdeki ϵ_r ve μ_r değerleri ise bulunulan noktada, ortamın elektriksel ve manyetik

özelliklerini temsil etmektedir. Bu denklemin, Ω üzerinde tanımlı vektörel bir φ fonksiyonu ile dahili çarpımı alınırsa

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{tot}} \right) \cdot \varphi d\Omega - \int_{\Omega} \left(k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^{\text{tot}} \right) \cdot \varphi d\Omega = 0 \quad (2)$$

denklemin elde edilir. Bu denklem, bilinen bir takım vektör eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki forma indirgenebilir:

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{tot}} \right) \cdot (\nabla \times \varphi) d\Omega - \int_{S(\Omega)} \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{tot}} \right) \times \varphi \cdot d\mathbf{s} - \int_{\Omega_{\text{ext}}} k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^{\text{tot}} \cdot \varphi d\Omega = 0 \quad (3)$$

Örneğin, Ω_{int} hacmini kaplayan cismin bir dielektrik (ε_r) olması durumunda (3) numaralı denklem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{set}} \right) \cdot (\nabla \times \varphi) d\Omega - \int_{\Omega} \left(k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^{\text{set}} \right) \cdot \varphi d\Omega = \int_{\Omega_{\text{int}}} \left(k_0^2 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}^{\text{inc}} \right) \cdot \varphi d\Omega \quad (4)$$

3. Sonlu Eleman Çözümü

Bir cisimden yansıyan elektrik alan (\mathbf{E}^{set}), oluşturulan N kenarlı her bir eleman içinde \mathbf{w}_i baz fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{E}^{\text{set}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i(\mathbf{r}) E_i \quad (5)$$

Galerkin Yöntemi kullanılarak; dahili çarpımda kullanılan φ fonksiyonu, elektriksel alanı ifade etmeye yarayan \mathbf{w}_i baz fonksiyonlarına eşit seçilirse, (4) numaralı denklem aşağıdaki hale gelir:

$$\int_{V_i} \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n E_n \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}_m) dV - \int_{V_i} \left(k_0^2 \varepsilon_r \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n E_n \right) \cdot \mathbf{w}_m dV = \int_{V_i} \left(k_0^2 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}^{\text{inc}} \right) \cdot \mathbf{w}_m d\Omega \quad (6)$$

Kenar elemanları, genel olarak bir problemde bilinmeyen vektörel büyüklüğün ilgili elemanın ‘kenar’ları üzerine izdüşümlerini temsil etmek üzere kullanılmaktadır. Herhangi bir elektromanyetik saçılım problemi altı yüzlü sonlu kenar elemanları ile çözülmek istenirse: problem geometrisi içinde xyz -uzayında tanımlı olan cisimler dönüşüme uğratarak uvp -uzayında $(-1, -1, -1)$ noktasından $(1, 1, 1)$ noktasına uzanan küpler haline getirilir. xyz ve uvp uzayları arasındaki ilişki ilgili Jacobian matrisi ile tanımlanmakta olup, formülasyonlarda geçiş bu matris vasıtasıyla yapılabilir.

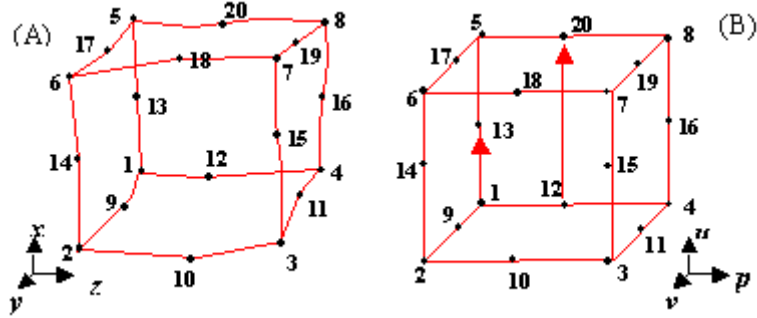
8 düğüm noktası (node) ve 12 kenar ile tanımlanmış olan birinci dereceden altı yüzlü sonlu kenar elemanları [6], yüzeyleri eğri olan cisimlerin temsil edilmesinde yeteri kadar doğru sonuç veremedikleri için, bu gibi cisimlerin temsilinde ikinci dereceden altı yüzlü sonlu kenar elemanlarının kullanılması daha uygundur. Şekil 1’de, bu dönüşüm ve ilgili kenar elemanı görülmektedir. Bu kenar elemanı, Kameari tarafından 20 düğüm noktası ve 36 kenar ile tanımlanmıştır [7]. Bu elemandaki baz fonksiyonları şu şekildedir: Elemanın fiziksel olarak kenarları üzerinde bulunan ve u yönündeki kısa kenarlar için (örneğin 1 ve 13 numaralı düğüm noktaları arası) baz fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{8} (1 + v_i v) (1 + p_i p) (u_i u + v_i v + p_i p - 1) \nabla u \quad (7)$$

Elemanın fiziksel olarak yüzeyinde bulunan ve u yönündeki uzun kenarlar için (örneğin 12 ve 20 numaralı düğüm noktaları arası) baz fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{4} (1 + p_i p) (1 - v^2) \nabla u \quad (8)$$

Yukarıdaki eşitliklerde $u_i = \pm 1/2$, $v_i = \pm 1$ ve $p_i = \pm 1$ olup i 'nci kenarın merkez noktasının koordinatlarıdır. v ve p yönündeki kenarlarla ilişkili baz fonksiyonları benzer şekilde bulunabilir.

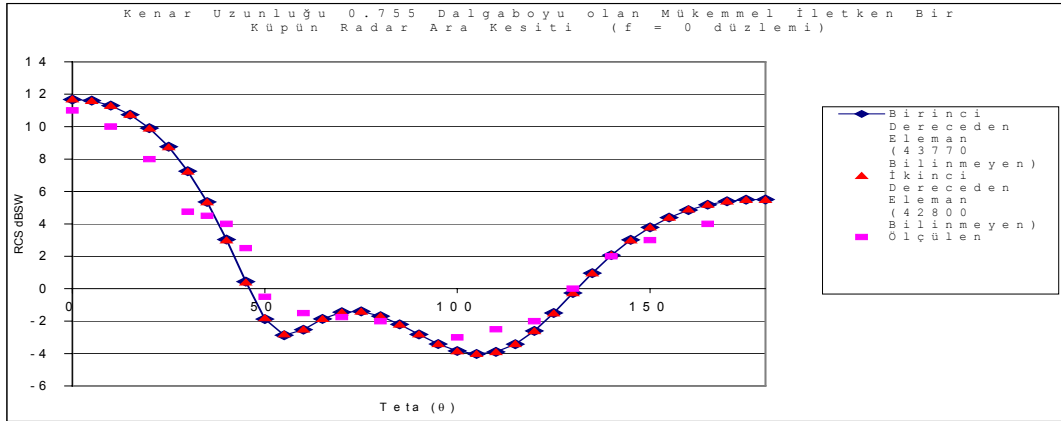


Şekil 1. (A) xyz -uzayında eğri yüzeyli bir şekil, (B) uvp -uzayında düzgün bir şekle dönüştürülmüş hali.

Sonlu eleman çözümü şu adımlar takip edilerek yapılır: Her bir eleman için (7) ve (8) numaralı denklemlerde belirtilen baz fonksiyonları hesaplanarak (6) numaralı denklemdeki integraller Gauss yöntemiyle alınır. Bütün elemanlar için elde edilen matrisler bütün geometriyi temsil edecek global sistem matrisini ve ilgili denklemi elde etmede kullanılır. Bilinen sınır değerler denklemde yerine konular ve matris denklemi çözülür. Elde edilen elektrik alandan, Huygens'in eşdeğerlilik prensibi vasıtasıyla uzak alan hesaplanır ve buradan ilgili cismin Radar Ara Kesiti (RCS) hesaplanır.

4. Sonuçlar

Yapılmış olan çalışmada, belirli cisimler için hem birinci dereceden hem de ikinci dereceden altı yüzlü sonlu kenar elemanları kullanılarak Radar Ara Kesit değerleri hesaplanmış, elde edilen sonuçlar [8] ile karşılaştırılmıştır. Mükemmel elektriksel iletken bir küp için elde edilen ve Şekil 2'de verilmiş olan sonuçlarda, ikinci dereceden elemanların birinci dereceden elemanlara göre büyük bir iyileştirme sağlamadığı gözlenmiştir. İleride yapılacak çalışmalarda küre, silindir gibi ikinci dereceden elemanların etkisinin daha yüksek olmasının beklendiği geometrilerle ilgili problemler çözülecektir.



Şekil 2. Mükemmel elektriksel iletken bir küp için bulunmuş olan sonuçlar.

Kaynaklar

- [1] R. Courant, "Variational methods for a solution...", Bull. Amer. Math. Soc., 49: s.1-23, 1943.
- [2] J. Bentley, "Programming Pearls", MA: Addison-Wesley Yayınevi, Bölüm 9, 1986.
- [3] W. H. Press, S. S. Teukolsky ve W. T. Vetterling, "Numerical Recipes in C", Cambridge Üniversitesi Yayınları, 2nci Baskı, Bölüm 2, s. 71-90, 1992.
- [4] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for...", J. Comp. Phys., cilt 114, s. 185-200, Ekim 1994.
- [5] W. C. Chew ve W. H. Weedon, "A 3-D perfectly...", Microwave Opt. Tech. Lett., s. 599-604, Eylül 1994.
- [6] J. S. van Welij, "Calculation of eddy current", IEEE Trans. Mag., cilt 21, No. 6, s. 2239-2241, 1985.
- [7] A. Kameari, "Calculation of Transient 3D...", IEEE Trans. Mag., cilt 26, No. 2, s. 466-469, Mart 1990.
- [8] A. D. Yaghjian ve R. V. NeGahan, "Broadside ...", IEEE Trans. Ant. Prop., 33(3): s. 321-329, Mart 1985.