

# İlintili Sönümlü Ortamlarda, Çoklu Girişimci Ve Gürültünün Varlığında Wishart Matrisleri İle Sinyallerin En İyi Birleştirilmesi

Aysel ŞAFAK, Sertaç BAHADIR, Baran USLU  
Başkent Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü  
[asafak@baskent.edu.tr](mailto:asafak@baskent.edu.tr), [bahadir@baskent.edu.tr](mailto:bahadir@baskent.edu.tr), [ibuslu@baskent.edu.tr](mailto:ibuslu@baskent.edu.tr)

**ÖZET:** Bu makalede, Rician sönümlü, ilintili gölgelemeli ortamlarda çoklu girişimci ve gürültünün varlığında en iyi birleştirmeli dizi anten sistemlerinde bağıdaşımli ve bağıdaşısız BPSK ve BFSK sinyalleri için karmaşık Wishart matrisleri kullanılarak bit hata olasılığı tam olarak hesaplandı. Karmaşık Wishart matrislerinin özdeğer dağılımları kullanılarak yeni geliştirilen bit hata olasılığının tam formülleri yardımıyla dizi anten sistemlerinin başarımı çeşitli sistem parametreleri için hesaplandı.

**Giriş:** Adaptif anten dizileri hem istenen sinyal üzerindeki çok yönlü sönümlenmenin bozucu etkisini azaltma, hem de girişim yapan sinyalleri bastırarak hücrenel sistemlerin başarım ve kapasitesini artırma özellikleri nedeniyle giderek artan önem kazanmaktadır. Sinyallerin birbiriyle ilintili olmadığı durumlar ve tek girişimci için bit hata olasılığını hesaplayan çok sayıda yayın mevcuttur. Çoklu girişimci ve gürültünün varlığında ilintili sinyaller için, dizi anten sistemlerinde bit hata olasılığı ile ilgili sınırlı sayıda yayın mevcuttur [1-3]. Bu çalışmada çoklu girişimci ve gürültünün varlığında, Rician sönümlü ve ilintili gölgelemeli kanallarda bağıdaşımli ve bağıdaşısız BPSK ve BFSK sinyalleri için karmaşık Wishart matrisleri kullanılarak dizi anten sistemlerinde bit hata olasılığını tam olarak hesaplayan formüller geliştirildi. Geliştirilen yeni tam analitik formüller kullanılarak dizi anten sistemlerinin başarımı çeşitli sistem parametreleri göz önüne alınarak incelendi.

**Sistem Modeli:** Dar bantlı kanallarda, çok sayıda sinyalin bağıdaşımli ve bağıdaşısız olarak alınması durumuna göre hesaplamalar yapıldı. Eşit güce sahip çoklu girişimciler ile alınan sinyalin vektörel gösterimi:

$$\bar{\mathbf{r}} = \sqrt{P_{0d}} \bar{\mathbf{u}}_0 + \sqrt{P_{0u}} \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{u}}_j + \bar{\mathbf{n}} \quad (1)$$

$\bar{\mathbf{u}}_j = [u_{j1} \ u_{j2} \dots \ u_{j\mu}]^T$  yayılma vektörünü,  $\mathbf{u}_{ji}$ ; i. inci anten elemanı tarafından alınan j. inci girişimci sinyale ait yayılma vektörünü gösterir.  $P_{0d}$  ve  $P_{0u}$  istenen ve girişimci sinyallerin ortalama gücüdür.  $\mu$ ; anten eleman sayısını,  $N$ ; girişimci sayısını gösterir. Alıcıdaki maksimum sinyal - girişim+gürültü gücü oranı ( $\text{SINR}_{\max}$ ):

$$\text{SINR}_{\max} = \bar{\gamma} = P_{0d} \bar{\mathbf{u}}_0^H \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_0, \quad \mathbf{B} = P_{0u} \mathbf{G} + N_0 \mathbf{I}, \quad \mathbf{G} = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{u}}_j \bar{\mathbf{u}}_j^H \quad (2)$$

$\mathbf{B}$ ; kısa-dönem özilinti matrisi,  $N_0$ ; gürültü gücü,  $\mathbf{I}$ ; ( $\mu \times \mu$ ) birim matrisi gösterir.  $\bar{\mathbf{u}}_j$ 'nin pdf'si:

$$p(\bar{\mathbf{u}}_j) = \frac{1}{\pi^\mu \det(\mathbf{M}_j)} \exp \left\{ -\bar{\mathbf{u}}_j^H \mathbf{M}_j^{-1} \bar{\mathbf{u}}_j \right\} \quad 1 \leq j \leq N \quad (3)$$

Burada  $|m_{0k}|^2 = K / (K+1)$  ve  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{M}_0 / (K+1)$ .  $K$ ; istenen sinyalin Rice faktörüdür.  $\bar{\gamma}$ 'nin moment üretme fonksiyonu (MGF):  $\Psi_{\bar{\gamma}}(\bar{z}) = E_{\mathbf{B}} \left\{ \Phi_{\bar{\gamma}}(\bar{z}) \right\}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_j$ 'nin pdf'si cinsinden yazılabilir:

$$\Phi_{\bar{\gamma}}(\bar{z}) = \int_{\bar{\gamma}} p(\bar{\gamma}) \exp(-\bar{z}\bar{\gamma}) d\bar{\gamma} = \int_{\bar{\mathbf{u}}_0} p(\bar{\mathbf{u}}_0) \exp(-\bar{z}P_{0d} \bar{\mathbf{u}}_0^H \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_0) \times \int_{\substack{\bar{\mathbf{u}}_j \\ j \neq 0}} p(\bar{\mathbf{u}}_j) d\bar{\mathbf{u}}_j \quad (4)$$

$$\Phi_{\bar{\gamma}}(z) = \frac{\exp \left( -\bar{\mathbf{m}}_x^H \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{m}}_x \right)}{\det(\mathbf{Q})} \quad (5)$$

$\bar{\mathbf{m}}_x = z \sqrt{\bar{\gamma}}$ ,  $\bar{\mathbf{m}}_0 = z \sqrt{\frac{\bar{\gamma}K}{K+1}} \bar{\mathbf{c}}$  ve  $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{T}^H \bar{\mathbf{c}}$  olarak tanımlanırsa,  $\mathbf{T}$ ;  $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + zP_{0d} \mathbf{V}_0 \mathbf{B}^{-1})$

matrisinin normalize özvektör matrisi ve  $\bar{\mathbf{c}}$  birim vektör olmak üzere, özdeğer ayrıştırımı ile (5),

$$\Psi_{\bar{\gamma}}(z) \approx E_{\lambda_i} \left\{ \Phi_{\bar{\gamma}}(z) \right\} = \prod_{i=1}^{\mu} \frac{\exp \left( \frac{-KP_{0d} |t_i|^2 z / E(\lambda_i)}{1 + K + zP_{0d} / E(\lambda_i)} \right)}{(1 + zP_{0d} / (1 + K)E(\lambda_i))} \quad (6)$$

$\lambda_i$ ;  $\mathbf{B}$  matrisinin özdeğerleridir.  $\mathbf{B} = P_{0u} \mathbf{G} + N_0 \mathbf{I}$  rastgele matristir. Yeni bir  $\mathbf{Y}_u$  ( $\mu \times N$ ) matrisi tanımlanırsa:

$$\mathbf{Y}_u = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \bar{\mathbf{u}}_1 & \bar{\mathbf{u}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{u}}_N \\ | & | & | & | \end{bmatrix}_{\mu \times N} \quad (7)$$

$\mathbf{G} = \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_u^H$  ve  $\mathbf{G} \sim \tilde{\mathbf{W}}(\mu, N)$  dir.  $\mathbf{B}$ 'nin özdeğerleri:  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{G}$ 'nin özdeğerleri:  $\alpha_i$  cinsinden yazılabilir:

$$\Psi_{\bar{\gamma}}(z) = \prod_{i=1}^{\mu} \frac{\exp\left(\frac{-KP_{0d} |t_i|^2 z / (P_{0u} E(\alpha_i) + N_0)}{1 + K + zP_{0d} / (P_{0u} E(\alpha_i) + N_0)}\right)}{(1 + zP_{0d} / (1 + K)(P_{0u} E(\alpha_i) + N_0))} \quad \lambda_i = P_{0u} \alpha_i + N_0 \quad i = 1, 2, \dots, \mu \quad (8)$$

$N_{max} = \max(\mu, N)$  ve,  $N_{min} = \min(\mu, N)$  için  $\mathbf{G}$ 'nin sıralı özdeğerlerinin ( $0 \leq \alpha_{Nmin} \leq \dots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \infty$ ) birleşik pdf'si:

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{Nmin}) = \left[ \prod_{i=1}^{N_{min}} \Gamma(N_{max} - i + 1) \Gamma(N_{min} - i + 1) \right]^{-1} \times \prod_{i=1}^{N_{min}} e^{-\alpha_i} \alpha_i^{N_{max} - N_{min}} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (9)$$

### Bit Hata Oranının Hesaplanması:

Bağdaşsız Kestirim Başarımı:  $P_e(\gamma) = \frac{1}{2} \exp(-a\gamma) \quad a=1, \text{ DPSK ve } a=0.5, \text{ NCFSK için.} \quad (10)$

Ortalama bit hata olasılığı:  $P_e = \int_0^{\infty} P_e(\gamma) p(\gamma) d\gamma \quad \text{ve} \quad \Psi_{\gamma}(z) = \int_0^{\infty} p(\gamma) \exp(-z\gamma) d\gamma \quad (11)$

(8), (11) ve (12) kullanılarak bağdaşsız kestirim için ortalama BER:

$$P_{e|\alpha_i} = \frac{1}{2} \Psi_{\bar{\gamma}}(z) \Big|_{z=a} = 0.5 \times \prod_{i=1}^{\mu} \frac{\exp\left(\frac{-K |t_i|^2 a A_i}{1 + a A_i}\right)}{(1 + a A_i)} \quad (12)$$

$$A_i = \frac{a\gamma(1 + N\gamma_u)}{(1 + K)(1 + E(\alpha_i)\gamma_u)}, \quad \gamma = \frac{\gamma_d}{1 + N\gamma_u}, \quad \gamma_u = \frac{P_{0u}}{N_0}, \quad \gamma_d = \frac{P_{0d}}{N_0}$$

Bağdaşlı Kestirim Başarımı:  $P_e(\gamma) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{a\gamma}) \quad a=1, \text{ BPSK ve } a=0.5, \text{ BFSK için.} \quad (13)$

$$P_{e|\alpha_i} = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_a^{\infty} \frac{1}{z\sqrt{z-a}} \prod_{i=1}^{\mu} \frac{\exp\left(\frac{-K |t_i|^2 z R_i}{1 + z R_i}\right)}{(1 + z R_i)} dz \quad (14)$$

### Rician Sönümlü ve İlihtli Gölgelemeli Sinyaller için BER:

$$BER = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_e p(P_{0d}, P_{0u}) dP_{0d} dP_{0u} \quad (15)$$

Rician sönümlü ve ilihli gölgelemeli kanallarda sinyallerin bağdaşsız kestirimi için BER:

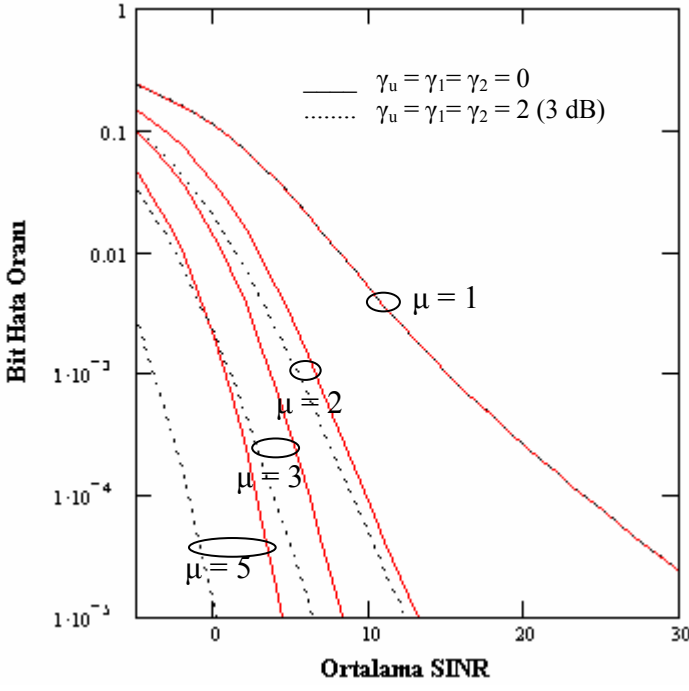
$$BER | \alpha_i = \prod_{i=1}^{\mu} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{-K |t_i|^2 a R_i}{1 + a R_i}\right)}{(1 + a R_i)} e^{-x^2} dx \quad (16)$$

$$\Gamma_u = \frac{P_{0d}}{P_{0u}} = \exp\left(\sqrt{2(\sigma_d^2 + \sigma_u^2 - 2\rho\sigma_d\sigma_u)} x + m_d - m_u\right) R_u^a \left(\frac{g + R_u}{g + 1}\right)^b \quad (17)$$

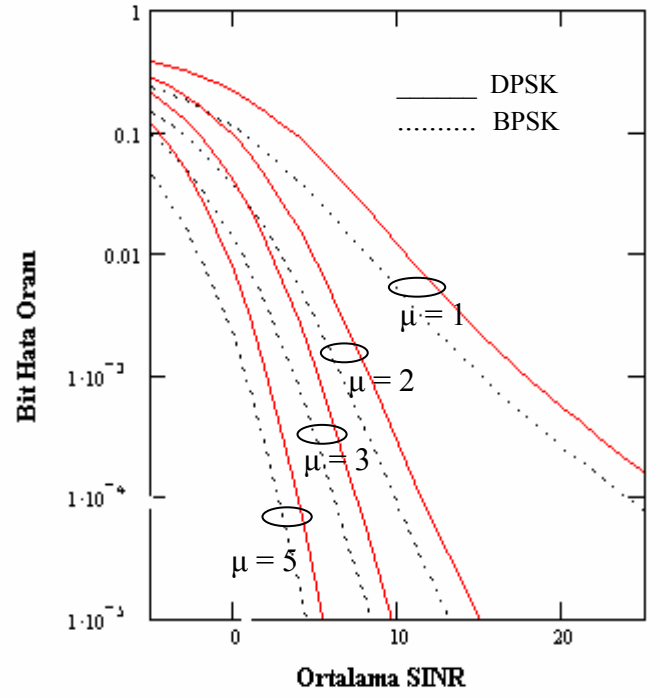
**Sonuçlar:** Şekil-1'de Rician sönümlü ortamda, N=2 girişimci ve DPSK modülasyon için BER'in  $\gamma_u$ ,  $\mu$  ve SINR ile değişimi görülmektedir. Şekil-2'de Rician sönümlü ortamda (K=6 dB), N=2 ve  $\gamma_u = 0$  için BER'in modülasyon (DPSK, BPSK) ve SINR ile değişimi incelenmiştir. Şekil-3'te BPSK modülasyonu ile; Şekil-4'te ise DPSK modülasyonu ile N=2 ve  $\gamma_u = 0$  için, BER'in K ve SINR ile değişimi incelenmiştir.  $\gamma_u = 0$ , maksimum oranda birleştirme sistemine karşılık gelir. Şekil 1-4'ten gözlemlendiği gibi adaptif anten sistemi, maksimum oranda birleştirme sisteminden daha iyi performans göstermektedir. Anten eleman sayısı:  $\mu$  arttıkça BER azalmakta, sistemin başarımı artmaktadır. Şekil-2'de görüldüğü gibi BPSK modülasyonu DPSK modülasyonundan daha yüksek başarımlı sağlamaktadır. Şekil-3 ve 4'te görüldüğü gibi adaptif anten sistemleri Rician sönümlü ortamda daha iyi performans göstermektedir ve Rice faktörünün artmasıyla BER düşmekte sistemin başarımı artmaktadır.

### Kaynaklar:

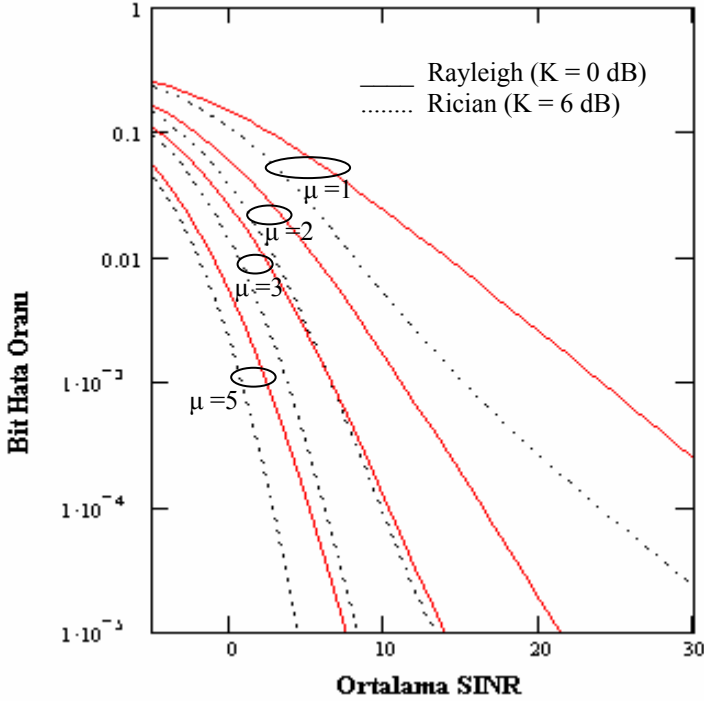
- [1] Tien D.Pham ve Keith G.Balmain, "Multipath Performance of Adaptive Antennas with Multiple Interferers and Correlated Fading", IEEE Trans.Vehic.Tech.vol.48,no.2,Sa. 342-352, Mart 1999.
- [2] A. Şafak, S.Bahadır, B.Uslu, "Gezgin İletişim Sistemlerinde Adaptif Hüzme Şekillendirme", URSI TÜRKİYE'2002 1. Ulusal Kongresi, İTÜ, Sa. 106-109, 18-20 Eylül 2002.
- [3] A. Şafak, S. Bahadır, "The Spectrum Efficiency For Optimum Combining Of Signals With Multiple Interferers And Thermal Noise", ELECO-2003, 3-7 Aralık 2003, Bursa.



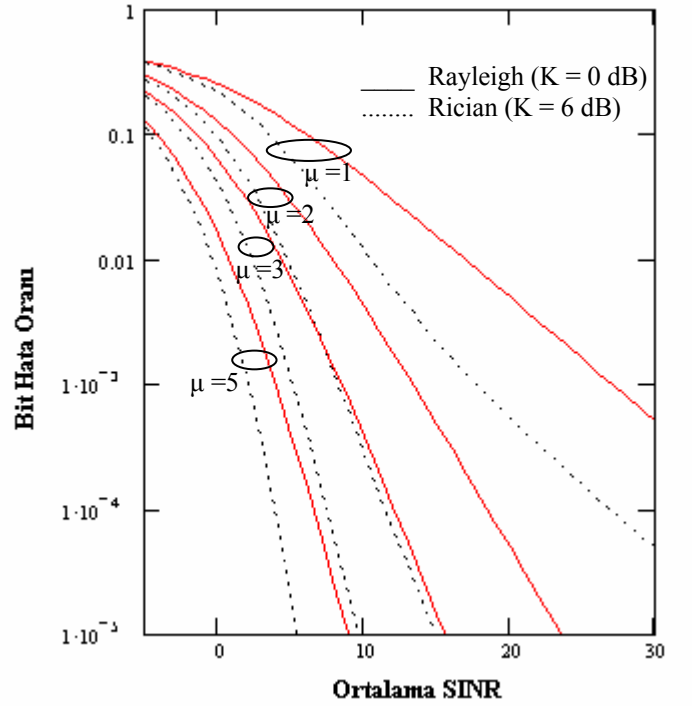
**Şekil-1** Rician sönümlü ortamda ( $K=6$  dB),  $N=2$  girişimci ve DPSK modülasyonu için, BER'in  $\gamma_u$ ,  $\mu$  ve SINR ile değişimi.



**Şekil-2** Rician sönümlü ortamda ( $K=6$  dB),  $N=2$  girişimci ve  $\gamma_u = 0$  için, BER'in in modülasyon (DPSK, BPSK) ve SINR ile değişimi.



**Şekil-3** BPSK modülasyonu ile  $N=2$  girişimci ve  $\gamma_u = 0$  için, BER'in Rice faktörü ve SINR ile değişimi.



**Şekil-4** DPSK modülasyonu ile  $N=2$  girişimci ve  $\gamma_u = 0$  için, BER'in Rice faktörü ve SINR ile değişimi.