

# Optimum Anten Dizileri

Sencer Koç \*  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü  
İnönü Bulvarı, 06531, Ankara  
[skoc@metu.edu.tr](mailto:skoc@metu.edu.tr)

**Özet:** Dizi antenlerde eleman uyarım katsayılarına göre yönlendiricilik incelenmiştir. Birbiçimli dizi genellikle optimum kabul edilmektedir. Ancak buradaki optimum kavramının açıklanması gereklidir. Bu çalışmada, kitaplarda sıkça rastlanan bir yanlışla işaret edilmekte ve optimum dizi kavramına açıklık getirilmeye çalışılmaktadır.

## 1. Giriş

Bir antenin kazancı ve yönlendiriciliği antenin ışınma etkinliğinin ölçüsüdür. Uygulamada yüksek kazançlı antenler tercih edilir. Bu şekilde daha düşük güçle iletişim sağlanabilir. Genellikle, açıklıklı antenlerde açıklık üzerinde düzgün alan dağılımı, dizilerde ise elemanların eşit uyarılması 'optimum' kabul edilir. Burada 'optimum'dan kasıt kazancın maksimum olması değil, antenin ışınma özelliklerinin bazı açılardan tercih edilir olmasıdır. Öte yandan kazancı maksimum olan yapıların incelenmesi, en azından matematiksel olarak önemlidir.

## 2. Anten Dizileri

Elemanları arasında  $d$  uzaklığı bulunan ve  $2N+1$  elemandan oluşan  $z$  eksenine yerleştirilmiş doğrusal bir anten dizisi düşünelim. Dizideki  $n$ 'inci antenin uyarım katsayısı  $c_n$  karmaşık sayısıyla gösterilsin. Bu dizi için dizi faktörü

$$F(\theta) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=-N}^N c_n e^{jnkd \cos \theta} \quad (1)$$

olarak yazılabilir. Dizi elemanları yönsüz antenler ise dizi faktörü, dizinin ışınma örüsünü verir.

### 2.1. Optimum yönlendiricilik

Doğrusal dizinin antene dik yönde ışınma yaptığını varsayarak dizi yönlendiriciliğini

$$D = \frac{4\pi \max_{\theta} |F(\theta)|^2}{2\pi \int_0^{\pi} |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta} = \frac{2|F(\pi/2)|^2}{\int_0^{\pi} |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta} = \frac{2 \left| \sum_{n=-N}^N c_n \right|^2}{\int_0^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{jnkd \cos \theta} \right|^2 \sin \theta d\theta} = \frac{\sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_n c_m^*}{\sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_n c_m^* \frac{\sin((n-m)kd)}{(n-m)kd}} \quad (2)$$

formülü ile ifade edebiliriz. Burada  $(\bullet)^*$  kompleks eşleniği göstermektedir. Bu denklemi, matris formunda

$$D = \frac{\mathbf{c}^H \mathbf{O} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c} = [c_{-N} \quad c_{-N+1} \quad \dots \quad c_N]^T, \quad \mathbf{A} = \left[ a_{nm} = \frac{\sin((n-m)kd)}{(n-m)kd} \right], \quad \mathbf{O} = [1] \quad (3)$$

şeklinde yazabiliriz. (3) denkleminde  $D$ 'nin dizi katsayılarına göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek  $D$ 'nin optimum (maksimum, minimum veya durağan) olacağı dizi katsayılarını bulabiliriz. Açıkça görüldüğü gibi, bütün eleman katsayılarının aynı sayıyla çarpılması, dizinin yönlendiriciliğini değiştirmez. Dolayısıyla  $D$ 'nin optimum değerlerinin bulunması problemi,  $\mathbf{c}^H \mathbf{O} \mathbf{c}$  çarpımının  $\mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c} = 1$  kısıtı ile optimumunun bulunması problemine eşdeğerdir. Dolayısıyla,  $D$ 'nin optimum değerleri,  $(\mathbf{O} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{c} = 0$  matris denkleminin karakteristik değerleri, yani  $|\mathbf{O} - \lambda \mathbf{A}| = 0$  karakteristik denkleminin kökleridir, [1]. Bu matris denkleminin  $\mathbf{c}$  vektörü için sıfırdan farklı çözümleri, yani karakteristik vektörleri de dizi katsayılarını verir. Karakteristik değerlerin en büyüğü,  $D$ 'nin en büyük olduğu durağan değerdir. Yukarıdaki tanımdan  $\mathbf{O}$  matrisinin rankının 1 olduğu, dolayısıyla karakteristik değerlerden sadece 1 tanesinin sıfırdan farklı olduğu görülebilir. Ayrıca,  $a_{n+1,m+1} = a_{nm}$  ve  $a_{mn} = a_{nm}$  olduğu için  $\mathbf{A}$  matrisi, reel, simetrik ve Toeplitz bir matristir. Bu nedenle dizi katsayıları simetrik olmalıdır;  $c_{-n} = c_n$ .

Dizi elemanları arasındaki uzaklığın  $\lambda/2$ , ( $kd = \pi$ ),..ve eleman katsayılarının aynı olduğu özel durumda (2) denkleminin dizinin yönlendiriciliği eleman sayısına eşit olarak bulunur,  $D = 2N+1$ . Bu durumda karakteristik denklem  $|\mathbf{O} - \lambda \mathbf{I}| = 0$  olur ve kökleri  $(-1)^M \lambda^{M-1} (\lambda - M)$  ile verilir. Burada  $M$  matrisin boyutu, yani dizideki eleman sayısıdır. Bu durumda birbiçimli dizi,  $D$ 'yi durağan kılan dizidir. Ancak dizi elemanları arasındaki uzaklığın değişik değerleri için durum farklıdır. Tablo 1'de  $kd = \pi/2$  durumunda birbiçimli (ve durağan diziler için yönlendiricilik değerleri verilmiştir.

Şekil 1, Tablo 1'e karşılık gelen diziler için dizi ışınma örüsünü göstermektedir. Bu şekilden de görülebileceği gibi, durağan dizinin kazancı daha yüksek olmakla birlikte yankulak seviyeleri de yüksektir. Aslında dizi yönlendiriciliği eleman katsayılarını uygun seçerek istenildiği kadar artırılabilir. Yönlendiriciliği birbiçimli diziyeye göre çok daha yüksek olan dizilere süper yönlendirici diziler denilmektedir. Süper yönlendirici dizilerde

eleman katsayılarındaki küçük bir değişim ışına örüntüsünü ciddi şekilde etkilemekte ve yönlendiricilik çok düşebilmektedir. Bu nedenle süper yönlendirici diziler pratikte kullanılmazlar.

**Tablo 1:** Eleman uzaklıkları  $kd=\pi/2$  olan birbiçimli ve durağan diziler için yönlendiricilik ve eleman katsayıları.

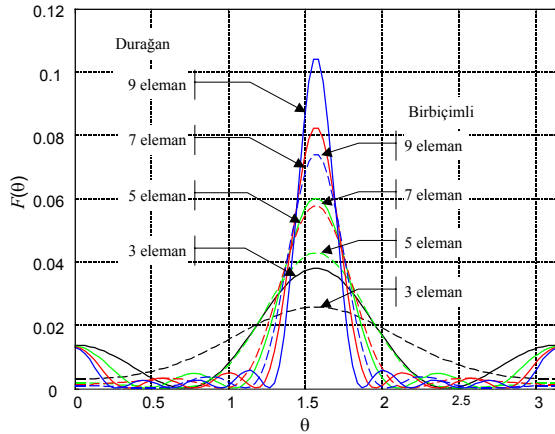
Eleman Sayısı	$D$ (birbiçimli dizi)	$D$ (durağan dizi) / (Dizi katsayıları)
3	$\frac{9}{3\pi+8} \approx 0.517\pi$	$\frac{3\pi-8}{\pi^2-8} \pi \approx 0.762\pi$ (-1.240, 0.932, -1.240)
5	$\frac{15}{3\pi+8} \approx 0.861\pi$	$\frac{45\pi^2-120\pi-64}{9\pi^2-88} \pi \approx 1.210\pi$ (-1.941, 3.365, -4.797, 3.365, -1.941)
7	$\frac{735}{105\pi+304} \approx 1.160\pi$	$\frac{9(1575\pi^3-4560\pi^2-11648\pi+32768)}{2025\pi^4-33264\pi^2+131072} \pi \approx 1.659\pi$ (3.294, -8.979, 16.258, -18.864, 16.258, -8.979, 3.294)
9	$\frac{945}{105\pi+304} \approx 1.491\pi$	$\frac{9(2480625\pi^4-7182000\pi^3-25680000\pi^2+69304320\pi+16777216)}{2480625\pi^4-48214800\pi^2+234225664} \pi \approx 2.108\pi$ (-5.822, 21.667, -48.888, 75.274, -87.034, 75.274, -48.888, 21.667, -5.822)

Üç elemanlı bir dizi için  $|\mathbf{O}-\lambda\mathbf{A}|=0$  karakteristik denkleminin sıfırdan farklı çözümü

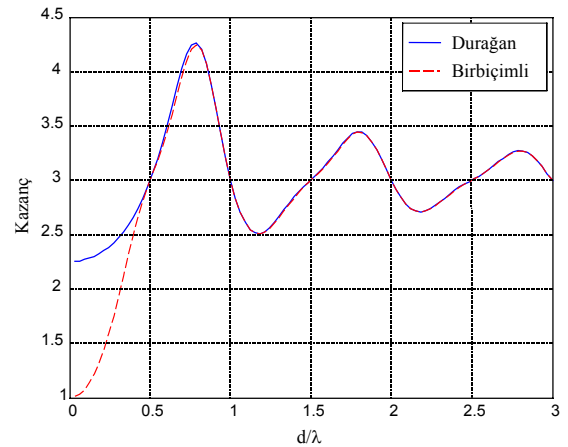
$$D = -\frac{8kd \sin kd - kd \sin 2kd - 6k^2 d^2}{2k^2 d^2 + kd \sin 2kd - 2 + 2 \cos 2kd} \quad (4)$$

olarak bulunabilir. Şekil 2’de üç elemanlı durağan dizi ve birbiçimli dizi için yönlendiricilik, elemanlar arası uzaklığın fonksiyonu olarak çizilmiştir. Durağan dizinin yönlendiriciliği daima birbiçimli dizi yönlendiriciliğinden fazla olmaktadır. Grafikler  $kd=\pi$  noktasında kesişmekte ve  $kd>\pi$  için birbirlerine çok yakın kalmaktadır. Bu gerçek, daha sonra açıklanacağı gibi, eleman sayısı daha fazla olan diziler için de geçerlidir.

Burada yapılan analize benzer bir çalışma [2]’de verilmektedir.



**Şekil 1:** Tablo 1’e karşılık gelen diziler için dizi ışına örüntüsü.



**Şekil 2:** Üç elemanlı durağan dizi ve birbiçimli dizi için yönlendiricilik.

## 2.2 Optimum Kazanç

Bütün elemanları özdeş olan bir anten dizisinde her elemanın empedansı aynı olduğu için, toplam giriş gücü, eleman katsayılarının karelerinin toplamı ile orantılı kabul edilir. Bu varsayım, elemanların karşılıklı empedanslarının ihmal edilmesi anlamına gelir. Bu durumda kazanç

$$G = \frac{4\pi \left| \sum_{n=-N}^N c_n \right|^2}{\sum_{n=-N}^N |c_n|^2} = \frac{4\pi \left( \sum_{n=-N}^N c_n \right) \left( \sum_{n=-N}^N c_n^* \right)}{\sum_{n=-N}^N c_n c_n^*} = \frac{\mathbf{c}^H \mathbf{O} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{I} \mathbf{c}} \quad (5)$$

olur. Burada  $\mathbf{I}$  birim matrisi göstermektedir. Dolayısıyla kazançın durağan değerleri,  $|\mathbf{O}-\lambda\mathbf{I}|=0$  denkleminin çözümü, yani  $\mathbf{O}$  matrisinin özdeğerleridir.  $\mathbf{O}$  matrisinin sıfırdan farklı tek özdeğeri  $M$ ’dir ( $M$  eleman sayısı) ve karşılık gelen özvektör bütün elemanları bir olan vektördür. Dolayısıyla birbiçimli dizi kazanç değerini durağan kılan dizidir.

### 2.3 Giriş gücü ve Işıma gücü

Yukarıdaki tartışmada dikkat edilmesi gereken nokta, herhangi bir kayıp düşünülmediği halde dizinin toplam ışımaya gücünün giriş gücünden farklı olmasıdır. Bu farkın incelenmesi önemlidir. Poynting teoremi

$$\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} = -j\omega \int_V (\mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV - \int_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Sağ taraftaki ilk terim sanaldır, ikinci terim ise kayıpsız yapılar için sıfırdır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV \quad (7)$$

yazılabilir. Denklem sol tarafı, ışımaya gücünü göstermektedir. Bu ifadeyi,  $z$  ekseninde  $z = \pm d/2$  noktalarına yerleştirilmiş,  $z$  doğrultusunda ve  $Idl$  şiddetinde iki akım elemanı için hesaplayalım. Bu amaçla  $z = +d/2$  noktasındaki akım elemanını  $\mathbf{J}_1$  ve bunun alanını  $\mathbf{E}_1$  ile,  $z = -d/2$  noktasındaki akım elemanını  $\mathbf{J}_2$  ve bunun alanını  $\mathbf{E}_2$  ile gösterelim. Bu durumda (7) denkleminin sağ tarafı

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1^* dV - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_2^* dV - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_1} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1^* dV - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_2} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* dV \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Sağ taraftaki ilk iki terim eşittir ve her akım elemanın kendi başına yapacağı ışımaya gücüdür:

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1^* dV = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_2^* dV = \frac{Z_0 k^2 I^2 dl^2}{12\pi} \quad (9)$$

(8) numaralı denklemin sağ tarafındaki son iki terim de birbirine eşittir ve

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1^* dV = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{V_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* dV = -\frac{1}{2} \frac{Z_0 k^2 I^2 dl^2}{4\pi} \left( \frac{2 \cos kd}{k^2 d^2} - \frac{2 \sin kd}{k^3 d^3} \right) \quad (10)$$

olarak hesaplanabilir. (7) denkleminin sol tarafını,  $S$  yüzeyini yarıçapı sonsuz olan bir küre olarak hesaplayabiliriz:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} = \frac{Z_0 k^2 I^2 dl^2}{4\pi} \left( \frac{2}{3} - \frac{2 \cos kd}{k^2 d^2} - \frac{2 \sin kd}{k^3 d^3} \right) \quad (11)$$

(9), (10) ve (11) numaralı denklemleri karşılaştırarak (7) denkleminin sağlandığını görebiliriz. Bu analiz, Poynting teoreminin incelenen özel durum için ispatıdır. Ancak sonuç, antenlerin aralarındaki etkileşimi gösteren  $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1$  gibi terimlerin ihmal edilemeyeceğini göstermektedir. Aslında antenin giriş gücü eleman katsayıları cinsinden

$$P_m = I_1^2 R_{11} + I_2^2 R_{22} + I_1 I_2 R_{12}$$

şeklinde yazılmalıdır.  $R_{12}$  sıfır olmadığı için (5) denkleminde verilen kazanç ifadesi yanlıştır. Ancak antenler arasındaki uzaklık arttıkça  $R_{12}$  küçülür ve (3) ve (5) denklemleri aynı sonucu verir.

Bu tartışma, bir dizide elemanlar arasındaki etkileşimin ihmal edilemeyeceğini göstermektedir. Ancak, elemanlar arası etkileşimin iki etkisi vardır. Öncelikle, elemanlar arasındaki karşılıklı empedans sıfırdan farklıdır. Ayrıca diğer dizi elemanları anten üzerindeki akım dağılımını etkileyerek her elemanın ışımaya örüsünü ve öz empedansını değiştirebilir. İkinci etki ışımaya örüsü ve öz empedansın durağan formüller olması nedeniyle ihmal edilebilir ve yukarıdaki incelemede dikkate alınmamıştır. Ancak antenler arasındaki karşılıklı empedansın ihmal edilmesi enerjinin sakınımı ilkesini ihlal eder.

### 3. Sonuçlar

Anten dizilerinde, özellikle pratikte sıkça olduğu gibi elemanlar arası uzaklık  $\lambda/2$ 'den az ise, antenler arasındaki karşılıklı empedans ihmal edilemez. Karşılıklı empedansın ihmal edilmesi enerjinin sakınımı ilkesinin ihlali anlamına gelir. Bu çalışmada anten dizilerinin kazancının hesaplanmasında sıkça yapılan bir hataya dikkat çekilmektedir. Bu hata dizi elemanları arasındaki karşılıklı empedansın ihmal edilmesidir. Benzer bir durum, açıklıklı antenler için de söz konusudur. Açıklık antenlerinde, açıklık üzerinde Poynting vektörünün entegrali alınarak ışımaya gücünün hesaplanabileceği varsayılmaktadır, [4]. Bu varsayım, açıklık alan dağılımı birbiriçimli ise kazancın maksimum olacağı sonucuna yol açar, [5]. Oysa, anten açıklığı üzerinde varsayılan alanların oluşturulabilmesi için gene anten açıklığı üzerinde bazı kaynakların bulunması gereklidir. Açıklık antenleri için yapılan analiz, yer darlığı nedeniyle burada verilememektedir.

Anten dizilerinde yönlendiricilik sınırsız artırılabilir. Bu durum süper yönlendiricilik olarak bilinmektedir. Ancak bu dizilerde anten yönlendiriciliği eleman katsayılarındaki küçük değişimlerden çok etkilenir ve uygulama açısından uygun değildir.

### Kaynaklar

- [1]. Wiley C. R., Advanced Engineering Mathematics. McGraw-Hill, Ltd., Tokyo, 4<sup>th</sup> Ed., s.600-603, 1975.
- [2]. Cheng D.K., "Optimization Techniques for Antenna Arrays," Proc. IEEE, 59, s.1664-1674, Aralık 1971.
- [3]. Tseng F., Cheng D.K., "Gain Optimization for Arbitrary Antenna Arrays Subject to Random Fluctuations," IEEE Trans. on Antennas and Propagat., 15(3), 356-366, Mayıs 1967.
- [4]. Collin R.E., "Antennas and Radiowave Propagation", McGraw-Hill, New York, s.184, 1985.
- [5]. Clarke R.H. ve Brown J., "Diffraction Theory and Antennas", Ellis Horwood, Ltd., New York, s.100, 1980.