

# Elektromanyetik Problemlerin Frekansa Bağlı Çözümlerinin Matris Kalem Yöntemi ile Dışdeğerlemesi

Ferhat Yıldırım ve Levent Gürel<sup>1</sup>  
Bilkent Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Bilkent, Ankara  
ferhat@ee.bilkent.edu.tr, lgurel@bilkent.edu.tr

## Özet

*Elektromanyetik problemlerin ara frekanslardaki çözümleri için Matris Kalem Yöntemi dışdeğerlemesi ele alınmıştır. Elektromanyetik problemler ve çözümlerinin özelliklerinden yararlanılarak ve matris kalem yöntemi temel alınarak daha iyi yaklaşımlar elde eden Bağlaşımlı Matris Kalem Yöntemi önerilmiş, iki yöntem hata oranları bakımından karşılaştırılmıştır.*

## 1. Giriş

Elektromanyetik problemlerin frekansa bağlı çözümleri, özellikle frekans yükseldikçe, çok fazla işlemci zamanı ve bellek tüketmektedir. Çözüm için kullanılan çeşitli yöntemler bu tüketimleri olabildiği kadar düşük seviyelere indirmeyi amaçlar. Örneğin, hızlı çokkutup yöntemi (FMM: fast multipole method) yüksek doğrulukla çözüm yapılabilen üst frekans sınırını başarıyla yükseltebilen ender yöntemlerden biridir. Buna rağmen, daha da yüksek frekanslarda çözüm gerektiğinde asimptotik yüksek frekans tekniklerine başvurmadan başka çare kalmamaktadır. Oysa, yüksek frekanslarda çözüm yapan asimptotik yöntemlerin hata oranları frekans azaldıkça yükselmektedir. Bu durum, ara frekanslar için yeni bir yöntem geliştirmeyi gerekli kılmıştır.

Ara frekanslar için önerilen dışdeğerleme (extrapolation) tekniği, uygun yöntemlerle hesaplanmış, alçak ve yüksek frekanslardaki değerleri bilinen bir elektromanyetik problemin çözümünün ara frekanslardaki değerlerini mümkün olduğu kadar düşük hata oranı ile hesaplanmasıdır. Çeşitli dışdeğerleme yöntemlerinin arasında Matris Kalem Yöntemi işlevselliği ve diğer yöntemler ile birleştirilebilmesi konusundaki esnekliği bakımından öne çıkmaktadır.

## 2. Matris Kalem Yöntemi

Dışdeğerleme için kullanılan bu yöntemde amaç sinyali ağırlıklı karmaşık üstel işlevler ile modellemektir. Bu modeli genel olarak şu şekilde yazabiliriz:

$$y[k] = \sum_{i=1}^M R_i z_i^k \quad (1)$$

Matris Kalem Yöntemi (MPM: Matrix Pencil Method),  $N$  noktası bilinen, (1) ile modellenmiş  $y$  sinyalinin modeldeki ağırlık ve karmaşık üstel değerlerini bulmak için bir yol sunar [1], [2]. MPM ile bilinen  $N$  nokta için bulunan model parametreleri kullanılarak sinyalin değeri istenilen herhangi bir noktada hesaplanabilir. Oluşturulan modelin doğruluğu, modelde kullanılan karmaşık üstel işlev sayısı olan  $M$  ile doğrudan ilişkilidir. En doğru model her zaman en çok karmaşık üstel işlev sayısı kullanılarak oluşturulamayabilir. En uygun  $M$  sayısı seçmek için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. MPM temel olarak şu denklemi çözmeye çalışır:

$$\mathbf{Y}_2 - \lambda \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{R} \{ \mathbf{Z}_0 - \lambda \mathbf{I} \} \mathbf{Z}_2 \quad (2)$$

Bu denklemin sol tarafına matris kalem adı verilir.  $\mathbf{Y}$  matrisleri dışdeğerlemesi istenilen sinyalin bilinen değerleri ile şu şekilde oluşturulur:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} y[1] & y[2] & \cdots & y[L] \\ y[2] & y[3] & \cdots & y[L+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y[N-L] & y[N-L+1] & \cdots & y[N-1] \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} y[2] & y[3] & \cdots & y[L+1] \\ y[3] & y[4] & \cdots & y[L+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y[N-L+1] & y[N-L+2] & \cdots & y[N] \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Bu çalışma, Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), TÜBİTAK (103E008), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmiştir.

Model (1) kullanılarak (3) şu şekilde ayrıştırılabilir:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{R} \mathbf{Z}_2 \quad (4)$$

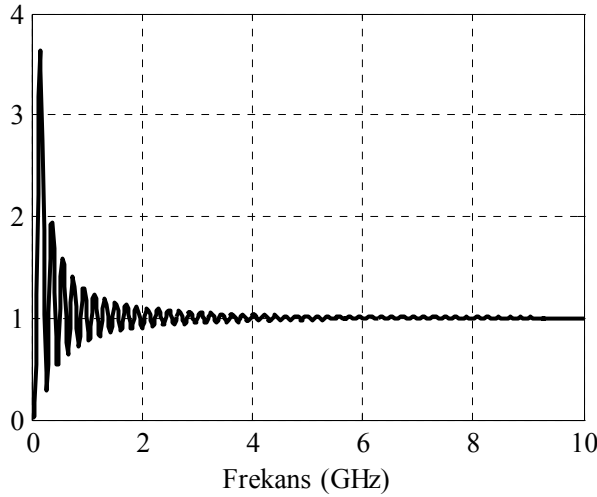
$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{R} \mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_2 \quad (5)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(N-L-1)} & z_2^{(N-L-1)} & \cdots & z_M^{(N-L-1)} \end{bmatrix}_{(N-L) \times M} \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{(L-1)} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{(L-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{(L-1)} \end{bmatrix}_{M \times L} \quad (6)$$

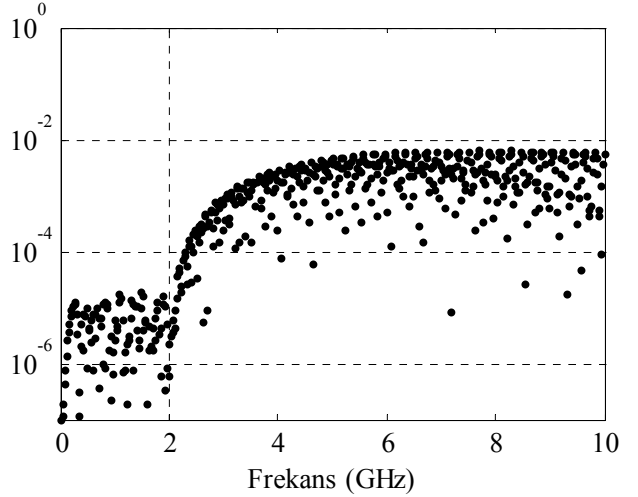
$$\mathbf{Z}_0 = \text{diag}[z_1, z_2, \dots, z_M] \quad (7)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_M] \quad (8)$$

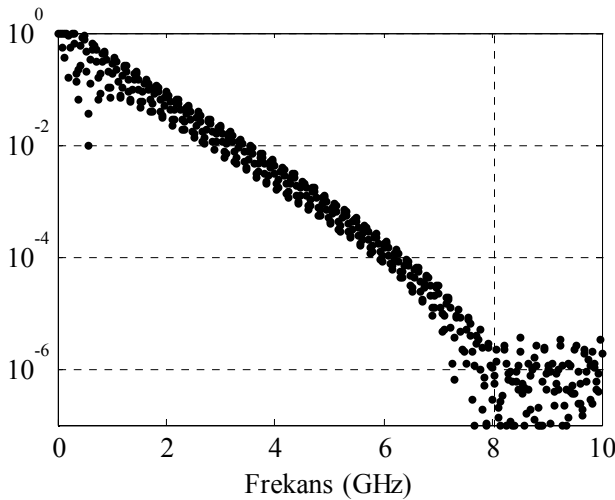
Denklem (7) ve (8) diagonal matrisleri ifade etmektedir, (6)'da kullanılan  $L$  değişkeninin  $N/2$  veya  $N/3$  şeklinde seçilmesinin yöntemin performansını arttırdığı belirtilir [1], [2]. Bu ayrışım (2)'nin sol tarafına uygulandığında eşitliğin sağ tarafı elde edilir.  $\lambda$  değeri bulunmak istenilen  $M$  tane karmaşık üstel değerlerden birine eşit olduğu zaman oluşturulan matris kalem 0'a eşit olacaktır. Bu model (1)'deki karmaşık üstel değerlerin oluşturulan matris kalemin genel özdeğerlerine (generalized eigenvalue) eşit olduğu sonucunu doğurur. Karmaşık üstel değerler bulunduktan sonra bu değerlerin ağırlıkları, dışdeğerlemesi istenilen sinyalin bilinen değerleri de kullanılarak şu matris denklemi ile hesaplanabilir:



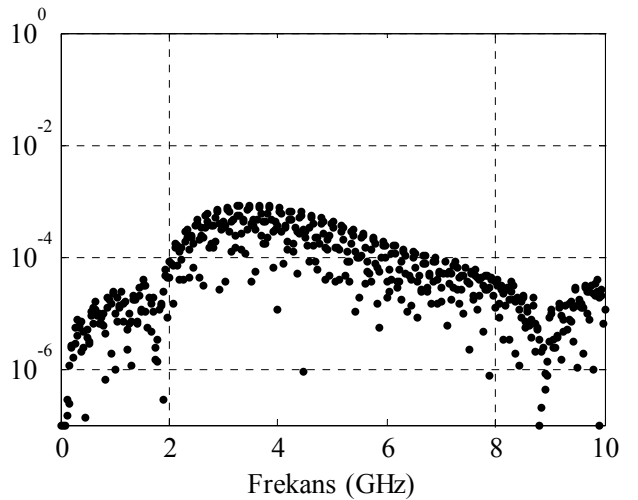
Şekil 1. İletken kürenin monostatik RKA değerleri.



Şekil 2. İleri yönlü MPM dışdeğerleme hatası.



Şekil 3. Geri yönlü MPM dışdeğerleme hatası.



Şekil 4. CoMPM dışdeğerleme hata grafiği.

$$\begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_M \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3. İleri ve Geri Dışdeğerleme

Eğer model (1)'deki  $k$  değişkenini frekans gibi düşünürsek, Bölüm 1'de belirttiğimiz elektromanyetik problem çözümünü  $y$  sinyali olarak alabiliriz. Bu sinyalin uygun elektromanyetik yöntemler ile çözülmüş küçük ve büyük  $k$  değişkenleri için olan değerleri bilinmektedir. Dışdeğerleme için izlenebilecek bir yol, küçük  $k$  için bilinen değerler kullanılarak Bölüm 2'de açıklanan yöntem ile sinyalin tamamının ileri yönlü hesaplanmasıdır. Bir diğer yol ise, yüksek  $k$  için aynı işlemin geri yönlü yapılmasıdır.

Yöntem denemeleri için 0.3 m yarıçapındaki iletken kürenin 0-10 GHz arasındaki monostatik radar kesit alanı verileri kullanılmıştır (Şekil 1). Bu frekans aralığı 500 noktaya bölünüp ileri ve geri dışdeğerleme tekniği MPM ile uygulanmıştır. Şekil 2, ilk 100 noktanın bildiği durum için bilinmediği varsayılan 400 noktadaki ileri yönlü yapılan MPM dışdeğerlemesinin her nokta için hatasını göstermektedir. Şekil 3 aynı işlemin son 100 noktadaki değerler kullanılıp geri yönlü yapılan MPM dışdeğerlemesinin her noktadaki hatasını göstermektedir. İki grafik karşılaştırıldığında, ileri yönlü yapılan MPM dışdeğerlemesi %1 gibi bir hata oranına yakınsarken, geri yönlü yapılan işlemde hatanın sürekli bir artış eğilimi içerisinde %100'ü geçtiği görülmektedir. Her iki yöndeki MPM dışdeğerlemesinde kullanılan karmaşık üstel değer sayısı olan  $M$  otomatik bir yöntemle seçilmiştir.

### 4. Bağlı Matris Kalem Yöntemi

MPM dışdeğerlemesi sırasında, sinyalin bilinen kısmı en iyi şekilde karmaşık üstel işlevler ile modellenmekte ve sinyalin geri kalanının da oluşturulan bu modele uyduğu varsayılmaktadır. Elektromanyetik çözümlerin özelliklerinden dolayı dışdeğerlemesi istenilen sinyalin iki bölgede verileri bilinmektedir. Bu iki kanallı bilgi Bölüm 3'te anlatılan tek yönlü MPM dışdeğerlemesi ile boşa harcanmış olmaktadır. Bu nedenle dışdeğerleme yapılırken her iki kanalın birden kullanıldığı Bağlı Matris Kalem Yöntemi (CoMPM: Coupled Matrix Pencil Method) geliştirilmiştir. CoMPM'de her iki bilgi kanalı için karmaşık üstel değerler (2)-(8) ile hesaplanır. Modeldeki ağırlıklar ise her iki kanaldan gelen karmaşık üstel değerlerin hepsi kullanılarak (9)'e benzer bir şekilde hesaplanır.

Şekil 4, Bölüm 2'de kullanılan elektromanyetik sinyalin baştan 100 ve sondan 100 noktası bilinerek yapılmış CoMPM dışdeğerlemesinin her noktadaki hatasını göstermektedir. Bölüm 2'deki şekillerle karşılaştırıldığında CoMPM dışdeğerlemesi tek yönlü MPM dışdeğerlemesine göre daha iyi sonuçlar vermiş ve hata %0.1'in altına inmiştir. CoMPM'de her iki bilgi kanalında kullanılan  $M$  parametreleri otomatik bir yöntemle seçilmiştir.

### 5. Sonuç

İleri ve geri MPM dışdeğerleme tekniklerinin bir arada kullanılması ile geliştirilmiş bağlı matris kalem yöntemi, ara frekanslardaki veri değerlerini verebilecek yeni bir teknik sunmaktadır. CoMPM'de hem yüksek, hem de alçak frekans verilerinin ortak kullanılması ile, ileri ve geri MPM dışdeğerleme yöntemlerinin tek başlarına kullanılmasından daha iyi sonuçlar alınmıştır. Sonuç olarak, alçak ve yüksek frekans verileri bilinen bir geometrinin ara frekans değerleri düşük hata oranı ile hesaplanmıştır.

### 6. Kaynaklar

- [1] T.K. Sarkar ve O. Pereira, "Using the Matrix Pencil Method to Estimate the parameters of a Sum of Complex Exponentials", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, s. 48–55, Şubat 1995.
- [2] R.S. Adve, T.K. Sarkar, O. Pereira ve S.M. Rao, "Extrapolation of Time-Domain Responses from Three-Dimensional Conducting Objects Utilizing the Matrix Pencil Technique", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, s. 147–156, Ocak 1997.