Gauss Demetiyle Aydınlatılmış Gömülü Silindirik Cisimlerin Cebirsel Yeniden Yapılandırma Yöntemiyle Görüntülenmesi

Ali ALKUMRU*, Fatih DİKMEN*, Kadir DURGUT**

* Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Bölümü,
Çayırova Kampüsü, 41400,Gebze, Kocaeli, TÜRKİYE
alkumru@gyte.edu.tr , dikmen@gyte.edu.tr

** Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Enerji Sistemleri Bölümü,
Muallimköy Kampüsü, 41400,Gebze, Kocaeli, TÜRKİYE
k.durgut@gyte.edu.tr

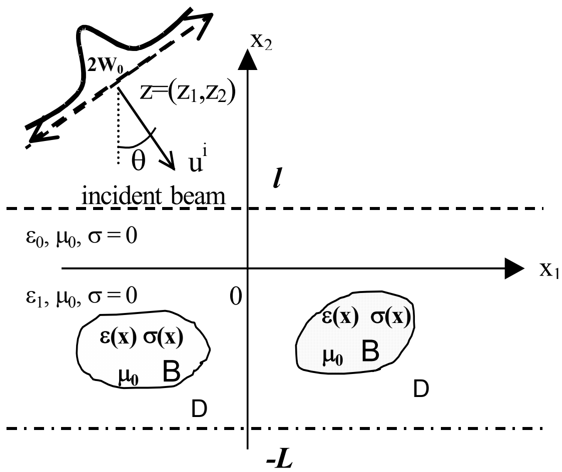
Özet: *Bu çalışmada, elektromagnetik özellikleri belirli bir yarı uzaya gömülü bulunan, doğrultusu bilinen sonsuz uzun bir silindirik cismin yerinin ve bünye parametrelerinin, Gauss demeti kullanılarak ortaya çıkarılması için geliştirilen bir iteratif yöntem incelenmiştir. Bunun için, Born yaklaşıklığı ve saçılan alanın Fourier dönüşümü kullanılarak problem önce cisim fonksiyonu tarafından sağlanan bir lineer operatör denklem sistemine indirgenmiş ve bu sistem iteratif bir yöntemle çözülerek sonuç elde edilmiştir.*

1. Giriş

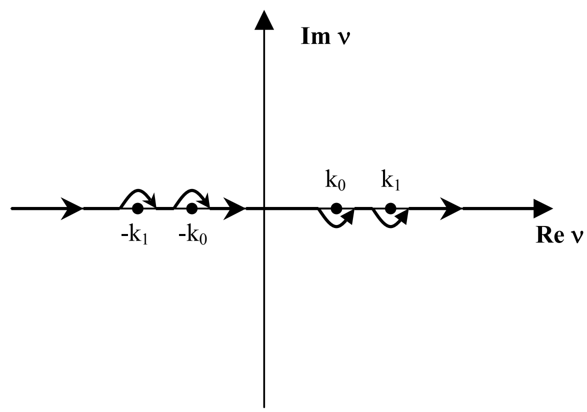
Bir ters saçılma probleminin amacı, genellikle, yanına yaklaşılamayan cisimlerin geometrik ve fiziksel özelliklerini, bu cismin dalga yayılımına yapmış olduğu etkileri uzaktan gözleyerek belirlemekten ibarettir. Burada sözü edilen geometrik özellikler cismin şekli ve konumu, fiziksel özellikler ise cismin dielektrik sabiti, manyetik geçirgenliği ve elektrik iletkenliği olarak bilinen "bünye parametreleri" dir. Özellikleri belirlenecek olan cisim ya sonsuz geniş bir ortamda bulunur ya da özellikleri bilinen bir başka ortamın içine gömülü olur.
Özellikle son otuz yıl içinde, yukarıda belirtilen şekilde tanımlanmış olan ters saçılma problemlerinin çözümüne ilişkin bir çok kesin ve sayısal yöntem ortaya atılmıştır. Bu yöntemleri iteratif ve iteratif olmayanlar olmak üzere iki ana bölüme ayırmak mümkündür. Bu yöntemlerden iteratif olanları, Cebirsel Yeniden Yapılandırma Tekniği (CYT)[1] ve Eşzamanlı İteratif Yeniden Yapılandırma Tekniği (EİYT) isimli yöntemlerden oluşmaktadır. Bu yöntemler, geometrik ve fiziksel özellikleri belirlenecek olan cisme ilişkin tahmini başlangıç değerlerinden hareket ederek, belirli bir sayıda iterasyondan sonra cismin söz konusu özelliklerine ait bir optimum sonuca ulaşmayı hedefleyen algoritmalardır. CYT algoritması ilk olarak bilgisayarlı tomografi'de kullanılmıştır [2]. Ladas ve Devaney [3] Rytov yaklaşıklığı kullanarak kırınım tomografisi için CYT türünde bir iteratif algoritma geliştirmeyi başarmışlardır. Geliştirilmiş olan bu algoritma Akduman ve Alkumru [4] tarafından gömülü silindirik cisimlere ilişkin problemlerin çözümünde başarıyla kullanılmıştır.
Bu çalışmanın amacı da elektromanyetik özellikleri bilinen bir yarı uzaya gömülü doğrultusu belirli,sonsuz uzun, silindirik bir cisme ilişkin geometrik şekli ve bünye parametrelerini, cismi içermeyen yarı uzayda yer alan bir eğri boyunca yapılacak ölçümler sonucunda ortaya çıkarabilecek bir CYT algoritması geliştirmektir. Gömülü cisim, ölçümlerin yapıldığı eğrinin bulunduğu bölge içerisin de uyarılmış bir Gauss demetiyle aydınlatılmıştır. Bir ters saçılma probleminde Gauss demeti kaynak olarak daha önce de göz önüne alınmış ve bu tür bir problemin çözümü karmaşık manifold tekniği kullanılarak gerçekleştirilmiştir [5].

2. Problemin Formülasyonu

Antimanyetik ve kayıpsız sonsuz geniş bir uzayın $x_2>0$ ve $x_2<0$ ile belirlenen yarıları, bünye parametreleri, sırasıyla ε_0, μ_0, $\sigma=0$ and ε_1, μ_0, $\sigma=0$, olan basit maddelerle dolu bulunsun ve $x_2<0$ bölgesi doğrultusu önceden bilinen, sonsuz uzun, antimanyetik bir $\mathcal{D}$ cismi içersin. $\mathcal{D}$ nin B ile gösterilen dik kesiti birbirinden ayrık bir çok parçadan oluşmuş olabilir (bk.şekil-1). Burada göz önüne alınmak istenen problem, şekil-1 deki geometriyi $x_2>0$ bölgesinde uyarılmış bulunan bir Gauss demetle aydınlatıp, $x_2=l>0$ eğrisi boyunca yapılacak ölçmelerle, $\mathcal{D}$ cisminin konumunun, şeklinin ve bünye parametrelerinin belirlenmesinden ibarettir. $\mathcal{D}$ yi oluşturan malzeme izotrop, lineer, lokal ve zamanla değişmeyen bir bünyeye sahiptir. Bir başka deyişle, $\mathcal{D}$ nin dielektrik sabiti $\varepsilon(x)$ ile, iletkenliği $\sigma(x)$ $x=(x_1,x_2)\in R^2$ nin skaler fonksiyonlarıdır.



Şekil 1



Şekil 2

Cismi aydınlatan Gauss demete ilişkin $\vec{E}^i$ elektrik alan Ox_3 eksenine paralel olsun ve bu eksene paralel bileşeni u^i ile gösterilsin. Zamana bağlılık çarpanının $e^{-i\omega t}$ şeklinde olduğu kabul edilerek

$$\vec{E}^i = (0,0,u^i(x,z)) \tag{1a}$$

$$u^i(x;z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\frac{\exp[P(\lambda)]}{\cos\theta}\exp\{i\lambda x_1 + \gamma_0(\lambda)x_2\}d\lambda \qquad x_2>0,\ \lambda\in C_1 \tag{1b}$$

$$P(\lambda) = -\left[W_0(\lambda - k_0\sin\theta)\big/(2\cos\theta)\right]^2 - i\lambda z_1 - \gamma_0(\lambda)z_2\,, \tag{1c}$$

şeklinde yazılır. Burada W_0, z ve θ şekil-1 de gösterilmiş olan demete ilişkin büyüklüklerdir. (1b) deki integral ifadede gözüken C_1 integrasyon çizgisi şekil-2 de verilmiş olan eğri olup yine aynı ifadede yer alan $\gamma_0(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$ ise şekil-2 deki gibi kesilmiş λ-düzleminde $\gamma_0(0)=-ik_0$ olacak şekilde tanımlanmış olan karekök fonksiyonudur. Yukarıdaki bağıntılarda gözüken k_0 büyüklüğü de $x_2>0$ bölgesine ilişkin dalga sayısıdır. Saçılan alan $u_D(x)$ in Born yaklaşıklığı altındaki integral gösteriliminin x_1 değişkenine göre Fourier dönüşümünün $x_2=l>0$ eğrisi üzerindeki ifadesi

$$\hat{u}_D(\nu,l) = \frac{k_1^2\exp(-\gamma_0(\nu)l)}{\pi\cos\theta\,[\gamma_0(\nu)+\gamma_1(\nu)]}\int_{C_1}\frac{\gamma_0(\lambda)}{[\gamma_0(\lambda)+\gamma_1(\lambda)]}\hat{v}(\nu-\lambda, i[\gamma_1(\nu)+\gamma_1(\lambda)])\exp[P(\lambda)]d\lambda \tag{2}$$

olarak hesaplanır. Burada $\gamma_1(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-k_1^2}$ şekil-2 deki gibi kesilmiş λ-düzleminde $\gamma_1(0)=-ik_1$ olarak tanımlanmış karekök fonksiyonu , $\hat{v}$ ise $v(x)=\left[(\varepsilon(x)+i\sigma(x)/\omega)\big/\varepsilon_1\right]-1$ bağıntısı ile tanımlı cisim fonksiyonunun x_1 ve x_2 değişkenlerine göre iki katlı Fourier dönüşümüdür. Cisim fonksiyonu $v(x)$ i (2) deki integral denklemden CYT yöntemi ile elde edebilmek için önce, bu denklemin en dik iniş çizgisi yöntemiyle

$$\hat{u}_D(\nu,l) \cong \frac{k_1^2 \exp(-\gamma_0(\nu)l)}{\pi \cos\theta\,[\gamma_0(\nu)+\gamma_1(\nu)]} \frac{\gamma_0(\lambda_s)}{[\gamma_0(\lambda_s)+\gamma_1(\lambda_s)]} M\hat{v}(\nu-\lambda_s, i[\gamma_1(\nu)+\gamma_1(\lambda_s)])\exp[P(\lambda_s)] \quad (3a)$$

$$\lambda_s = k_0 \sin\theta + [k_0(z_1\cos\theta + z_2\sin\theta)] \Big/ [(iW_0^2 k_0 \big/ 2\cos\theta) - z_2 + (i\sin^2\theta \big/ k_0\cos^3\theta)] \quad (3b)$$

şeklindeki asimptotik ifadesi elde edilir. (3a) da gözüken $M\hat{v}$ büyüklüğü $v(x)$ cisim fonksiyonuna ilişkin

$$Mv(x) = \begin{cases} v(x) & , -L < x_2 < 0 \\ 0 & , \textit{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

ile tanımlı maskeleme operatörünün iki katlı Fourier dönüşümüdür. (3a) denkleminin her iki tarafının $e^{i\nu x_1}/2\pi$ ile çarpımının, bilinen sabit θ_n, n=1,2,...,N değerlerine ilişkin ifadesinin $\nu\in(-k_1, k_1)$ aralığındaki integrali

$$A_n v(x_1) = a_n(x_1), \qquad n = 1,\dots,N \quad (5a)$$

$$A_n v(x_1) = \frac{k_1^2 \gamma_0(\lambda_s^n) exp[P(\lambda_s^n)]}{2\pi^2 cos\,\theta_n [\gamma_0(\lambda_s^n)+\gamma_1(\lambda_s^n)]} \int_{-k_1}^{k_1} \frac{exp(-\gamma_0(\nu)l)}{[\gamma_0(\nu)+\gamma_1(\nu)]} M\hat{v}(\nu-\lambda_s^n, i[\gamma_1(\nu)+\gamma_1(\lambda_s^n)]) e^{i\nu x_1} d\nu \quad (5b)$$

biçiminde bir lineer operatör denklem sistemi verir. Bu son ifadede $\theta_n=\arctan(-z_1^n/z_2^n)$ ve $\lambda_s^n=k_0\sin\theta_n$ ile tanımlı büyüklüklerdir. (5a) da gözüken $a_n(x_1)$, farklı θ_n, n=1,2,...,N geliş açıları için $x_2=l>0$ boyunca saçılan alana ilişkin ölçümler sonucunda elde edilmiş bilinen bir fonksiyondur. Böylelikle, (5a) daki operatör sistem Kaczmarz tarafından önerilen iteratif yöntem[6] kullanılarak, $v(x)$ cisim fonksiyonu için aşağıdaki şekilde çözülür:

$$v_0 = v^j, \qquad v_n = v_{n-1} + A_n^*(A_n A_n^*)^{-1}(a_n - A_n v_{n-1}), \quad n = 1,\dots, N, \qquad v^{j+1} = v_N \quad (6)$$

Burada j iterasyon sayısını, v_0 da belirlenecek olan $v(x)$ cisim fonksiyonuna ilişkin tahmini başlangıç değerini göstermektedir. (6) da gözüken A_n^* büyüklüğü ise (5b) ile verilmiş olan A_n operatörünün eşleniği olup, açık ifadesi ilişkili Hilbert uzaylarında

$$(A_n v(x_1), a_n(x_1))_H = (v(x), A_n^* a_n(x))_{H_n} \quad (7)$$

şeklindeki iç çarpımla elde edilir. (7) ve (5a,b) bağıntıları dikkate alınarak, basit hesaplamalar sonucunda (6) daki $A_n^*(A_n A_n^*)^{-1}(a_n - A_n v_{n-1})$ kompozit operatörü

$$\begin{aligned} A_n^*(A_n A_n^*)^{-1}(a_n - A_n v_{n-1}) &= \frac{1}{2k_1^2 L} exp(-ik_0 z_2^n / cos\theta_n)\left[cos\theta_n + \sqrt{(k_1 / k_1)^2 - sin^2\theta_n}\right] \times \\ M\int_{-k_1}^{k_1} [\gamma_0(\nu)+\gamma_1(\nu)] e^{\gamma_0(\nu)l} [\hat{a}_n(\nu) - A_n\hat{v}_{n-1}(\nu)] & exp\left(i(\nu - k_0 sin\theta_n)x_1 - \left[\gamma_1(\nu) - i\sqrt{k_1^2 - k_0^2 sin^2\theta_n}\right]x_2\right)d\nu, \quad n = 1,\dots,N \end{aligned} \quad (8)$$

olarak elde edilir.

Kaynaklar

[1] Gordon, R., “A tutorial on ART”, IEEE Trans. Nuclear Science, NS-21, pp:78-93, 1974.
[2] Natterer F., “The Mathematics of Computerized Tomography”, Wiley, New York, 1986.
[3] Ladas, K.T. and Devaney, A.J., “Generalized ART algorithm for diffraction tomography”, Inverse Problems, 7, ppp: 109-125, 1991.
[4] Akduman I. And Alkumru A, “A generalized ART algorithm for inverse scattering problems related to buried cylindrical bodies”, Inverse Problems 11, pp:1125-1135, 1995.
[5] Akduman I., “An Inverse Scattering Problem Related to buried cylindrical bodies illuminated by Gaussian Beams”, Inverse Problems, 10, 213-226, 1994.
[6] S. Kaczmarz, “Angemaemrte Auflaesung von systemen linearer Gleichungen”, Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A 335-37,1937