

Solenoidal Eşlenmiş Dejenere Kavite Modlarının Zaman Domeni Salınımları

Fatih Erden, Oleg A. Tretyakov
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Gebze, İzmit
fatih@erden.org, tretyakov@gyte.edu.tr

Özet: Bu çalışmada; içerisinde kayıplı bir yapı bulunan dikdörtgen bir kavitede TE ve TM dejenere modların anlık salınımları incelenmiştir. Kavite içerisinde yapı bulunduğu TE ve TM modlarının özfrekansları ikiye ayrılmak durumunda kalmakta ve modlar eşlenmektedir. Harici bir kaynak tarafından kavite içerisine sonlu bir işaret verilmektedir. İşaret verildiği süreçte ve kesildikten sonra olan salınımların analitik çözümü nedensellik ilkesi temelinde elde edilmiştir. Problem zaman domeninde çeşitli elektromanyetik alan problemlerinin incelenmesi için geliştirilen Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım metodu ile çözülmüştür.

1. Giriş

Genel bir bakış açısı ile bakıldığında, elektromanyetik teoride çeşitli zaman domenli çalışmalarını iki ana yola ayrılmaktadır. En çok bilinen ilk yol, FDTD gibi güçlü sayısal metodların geliştirilmeleri ve uygulanmaları ile bağlantılıdır. Gerçekte, bu alandaki ilerlemeler sadece modern bilgisayar kaynakları ile sınırlanmaktadır. İkinci yol ise genellikle integral dönüşümlerinin (Fourier veya Laplace) kullanılması ile gerçekleştirilen analitik çalışmalar ile ilgilidir. Bu yolda birçok kişi doğal matematiksel problemlerle karşılaşmaktadır. Bunlardan birisi, görelilik teorisi ile nedensellik prensibinin gereksinimlerinin, bir çözümü mecbur tutmasıdır.

Analitik çözüm metodları sınıfıyla ilgili olan bu çalışmamız, çeşitli elektromanyetik alanların Zaman Domeninde analitik (aynı zamanda sayısal) olarak incelenmesini amaçlayan Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETEY) [1] metodu çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. ETEY metodu, evrimsel diferansiyel denklem teorisini zaman domeninde (zaman türevli diferansiyel denklemde olduğu gibi) kuvvetli bir araç olarak kabul eder. 80'lerde önerilen ETEY metodunun, zaman domeninde bir kavitede uygulanmasına ilişkin örnekler mevcuttur [2], [3]. Bu sunumda; yüzeyi mükemmel elektrik iletkenliğine sahip olan sıradışı bir dikdörtgen kavitede, eşlenmiş dejenere (tekil) TM ve TE solenoidal modlarının zamanla değişen salınımları incelenmiştir. Zamana bağlı salınımların tam analitik çözümü nedensellik ilkesi ile uyumlu olarak, grafiksel sonuçlarla elde edilmiştir.

2. Zaman Domeninde Problemin Serimi ve Çözümü

Çalışmamızın amacı; sınırları $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$ şeklinde belirlenmiş, V hacimli dikdörtgen bir sıradışı kavitedeki TM ve TE modlarına ait salınımların zamanla değişimini incelemektir. Kavite içerisinde herhangi bir yere, merkezi (x_0, y_0, z_0) serbest parametreleri ile belirlenmiş, kayıplı bir dikdörtgen yapı yerleştirilmiştir. Kayıplı yapının v hacmi $-aa/2 \leq x - x_0 \leq aa/2$, $-ab/2 \leq y - y_0 \leq ab/2$, $-ad/2 \leq z - z_0 \leq ad/2$ ile belirtilirken, burada ölçek faktörü olan $\alpha < 1$ de serbest bir parametre olarak alınmıştır. $J_\sigma(r, t) = \sigma E(r, t)$ ilişkisi; v hacmi içerisinde, zaman domeninde bir E alanı tarafından indüklenen elektrik akım yoğunluğuna karşı gelirken, σ kayıplı yapının iletkenlik sabitidir.

Çalışmanın hedefi, içerisine kayıplı bir yapı yerleştirilen sıradışı bir kavitenin, uygulanan bir işarete cevabını belli bir konum ve zaman için incelemektir. Problemin çözümü nedensellik prensibi ile uyumlu olarak elde edilmelidir.

ϵ_0 , μ_0 serbest-uzay sabitleri, p , q , ve s modları belirleyen serbest parametreleri ifade eden tam sayılar olmak üzere; içerisinde herhangi bir kayıplı yapı bulunmayan "sıradan" dikdörtgen kavitenin özfrekansının;

$$w_{pqs} = \pi \sqrt{(p/a)^2 + (q/b)^2 + (s/d)^2} / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (1)$$

olduğu bilinmektedir. TE modları için $s > 0$ iken, TM modları için $s \geq 0$ olmalıdır; p ve q tam sayıları $p + q \neq 0$ eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan tam sayılardır. Bundan dolayı, TM ve TE modları için

özfrekanslar $s > 0$ için eş olmaktadır. Aynı w_{pqs} özfrekans değerine karşılık gelen iki mod, *dejenere* veya *tekil* şekilde adlandırılırlar. Tekil modlar lineer olarak bağımsız ve dikeydirler. Elbette ki, kavite; içerisinde yapı bulundurmayan *sıradan* bir kavite olduğu takdirde, tekil modlar eşlenmemiş olurlar.

Bir çift tekil mod içeren ve içerisinde kayıplı bir yapı bulunan *sıradışı* bir kavite için, bir $\vec{E}(r,t)$, $\vec{H}(r,t)$ elektromagnetik alan modeli ele alalım. r konum vektörü, t zaman, i imajiner birim olmak ve, (') TE zaman domeni moduna ve (") TM zaman domeni moduna karşılık gelmek üzere, tekil modlar şu şekilde belirtilirler;

$$\begin{aligned}\vec{E}(r,t) &= e'_{pqs}(t) E'_{pqs}(r) + e''_{pqs}(t) E''_{pqs}(r) \\ \vec{H}(r,t) &= i h'_{pqs}(t) H'_{pqs}(r) + i h''_{pqs}(t) H''_{pqs}(r)\end{aligned}\quad (2)$$

Zaman domenindeki modal alanların böylesi gösterimi *Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETEY)* metodu çerçevesinde yapılmıştır [1]. Zamanla değişim gösteren skaler değerli gerçek $e'_{pqs}(t)$, $h'_{pqs}(t)$ ve $e''_{pqs}(t)$, $h''_{pqs}(t)$ fonksiyonları fiziksel olarak *modal genlikleri* ifade etmektedirler. Gerçek değerli vektörel $E'_{pqs}(r)$, $H'_{pqs}(r)$ ve $E''_{pqs}(r)$, $H''_{pqs}(r)$ fonksiyonları *modal temelin* elemanlarıdır. Dikdörtgen kavite için bu vektörel fonksiyonlar daha önceden belirlenmişti [2]. Belirlenmiş olan bu fonksiyonları şimdi bilinenler olarak alabiliriz. Dolayısıyla problemi çözmek için sadece denklem (2)'deki modal genlikler belirlenmelidir.

Denklem (2), kavitedeki zamana bağlı alanların modal temeller üzerine izdüşümleri için bir yaklaşıklık olarak ele alınabilir. *ETEY* metodunu takip ederek, Maxwell denklemlerinin de (∂_t ile birlikte) aynı modal temellerin elemanları üzerine izdüşümleri bulunmalıdır. Bu yol, modal genlikler için *zaman türevli* bir adi diferansiyel denklem sistemi sağlar (evrim denklemleri) [1], [2].

Elektrik akım şiddetini; Maxwell denklemlerinde verilen bir kaynak fonksiyonu olarak, $\vec{J}_e(r,t) = J(r)j(t)$ çarpımı şeklinde belirleyelim. $W(t) = H(t) - H(t-T)$ olmak üzere, T sonlu zaman aralığında üretilen bu sinüs biçimli işareti,

$$J(r) = E''_{pqs}(r), \quad j(t) = W(t)\Omega \sin(\Omega t) \quad (3)$$

faktörleri belirlesinler. $H(t)$ Heaviside basamak fonksiyonu ve Ω işaretin frekansdır.

Çözüm, $\xi = t w_{pqs}$ boyutsuz zaman birimi olmak üzere, matris gösterimi kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$X(\xi) = \begin{pmatrix} e'_{pqs}(\xi) \\ i h'_{pqs}(\xi) \\ e''_{pqs}(\xi) \\ i h''_{pqs}(\xi) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 1 & \gamma_{12} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & 0 & \gamma_2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

γ_1 ve γ_2 sayıları TE and TM modlarının; v hacmi içerisinde kendi içlerinde dönüşümlerini belirlerken, γ_{12} sayısı bunların karşılıklı dönüşümlerini belirlemektedir. Bu sayılar σ ile orantılı sayılardır:

$$\gamma_1 = \frac{\sigma}{w_n V} \int_v E'_n \cdot E'_n dv, \quad \gamma_2 = \frac{\sigma}{w_n V} \int_v E''_n \cdot E''_n dv, \quad \gamma_{12} = \frac{\sigma}{w_n V} \int_v E''_n \cdot E'_n dv \quad (5)$$

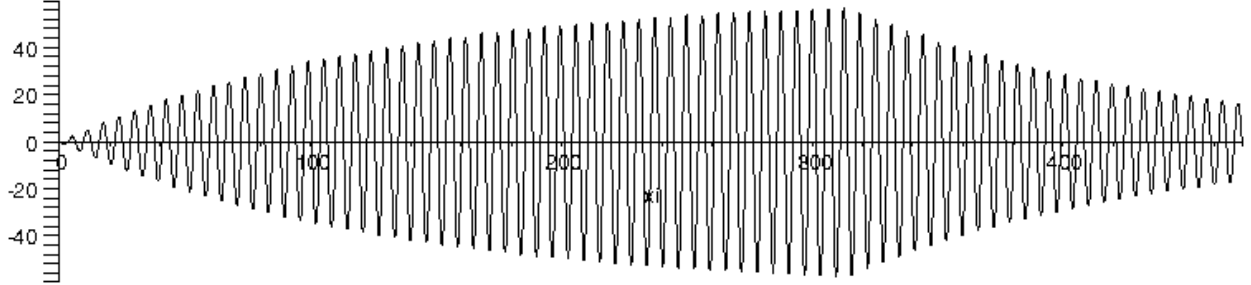
Burada n alt indisi pqs 'i ifade etmekte, F vektörü kaynağın TM moduna ayarlandığını göstermektedir. Modal genlikler için evrim denklemlerinin tam çözümü, $X(0) = 0$ homojen sınır koşulları altında elde edilmiştir.

$\tau = T w_{pqs}$, $Y(\xi) = w \int_0^\xi e^{xQ} F \sin(wx) dx$ ve $w = \Omega / w_{pqs}$ olmak üzere çözümün basit formu:

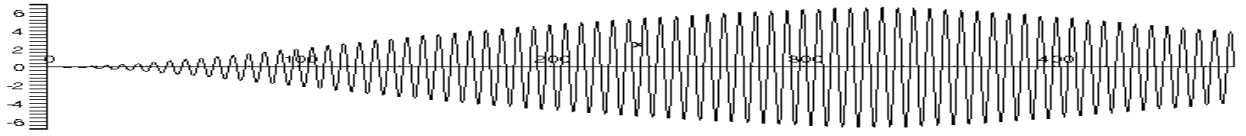
$$X(\xi) = W(\xi) e^{-\xi Q} Y(\xi) + H(\xi - \tau) e^{-\xi Q} Y(\tau) \quad (6)$$

şeklinde. Matrix eksponansiyeller; $\exp(-\xi Q)$ ve $\exp(xQ)$ 'nin analitik ve sayısal hesaplamaları için çeşitli metodlar mevcuttur [4].

Kavite içerisindeki salınımların denklem (6) ile hesaplanması sonucu elde edilen bazı grafiksel sonuçlar aşağıda sunulmuştur. TM_{111} rezonans modu için elektrik alanın mod genliği Şekil 1'de, TE_{111} eşlenik modu için elektrik alanın mod genliği Şekil 2'de görülmektedir. Kaynak işaretinin süresi 50 periyod olup, bu süre grafiklerde $0 \leq xi \leq 314$ 'e karşı gelmektedir. Diğer örneklerden elde edilen sonuçların bir kısmı sempozyumda sunulacaktır.



Şekil 1. TM_{111} modu için Elektrik alanın mod genliği (e'').



Şekil 2. TE_{111} modu için Elektrik alanın mod genliği (e').

3. Sonuç

a. Çözüm (6), içerisinde yapı bulunan *sıradışı* bir kavitede sonlu bir işaretin (3) etkisi altında zorunlu ve serbest salınımların oluşmasına neden olan eşlenmiş modlar çiftlerinin, ortaklaşa bir birleşik *dinamik sistem* ortaya çıkardığını göstermektedir.

b. Çözüm (6)'daki ilk terim, $0 \leq \xi \leq \tau$ süresince kaynak tarafından kaviteye uygulanan *zorunlu* salınımlara karşılık gelmektedir. İkinci terim ise, kaynak $\xi = \tau$ anında sönmüldürildikten sonra ($\xi > \tau$) devam eden serbest salınımları ifade etmektedir. Serbest salınımlar $\xi = \tau$ anında $Y(\tau)$ genliği ile başlarlar. $\xi \leq 0$ durumu için; *nedensellik* ilkesinin karşılığı olarak çözümün $X(\xi) \equiv 0$ olduğu görülmektedir.

c. Salınımların frekansları Q matrisinin özdeğerleri ile belirlenmiştir. Kavite içerisinde yapı bulunmadığında $\sigma = 0$ olduğundan $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{12} = 0$ olur. Q 'nun w_{pqs} özfrekansına eş olan özdeğerleri $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = \pm i$ olmak üzere çift ve tamamen imajinerdir. Eğer kavitenin *sıradanlığı*, içerisine konan bir kayıplı yapı ($\sigma \neq 0$) ile bozulursa, Q 'nun eş özdeğerleri ikiye ayrılmak durumunda kalmakta, ve özdeğerler farklı ve kompleks-değerli olmaktadır. Özdeğerlerin kompleksliği, dinamik sistemin fiziksel olarak enerji harcayan bir sistem olduğu anlamına gelmektedir. Yankılanan salınımlar $\Omega = w_{pqs} |\text{Im}(\lambda_1)|$ veya $\Omega = w_{pqs} |\text{Im}(\lambda_3)|$ olduğu her iki durumda ve ayrıca $|\text{Im}(\lambda_1)| = |\text{Im}(\lambda_2)| < 1$ ve $|\text{Im}(\lambda_3)| = |\text{Im}(\lambda_4)| < 1$ olduğu durumda gerçekleşmektedir.

Kaynaklar

- [1]. O. A. Tretyakov, Ch. 3 "Essentials of nonstationary and nonlinear electromagnetic field theory," in M. Hashimoto, M. Idemen, O.A. Tretyakov, Eds., Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, Science House Co. Ltd., Tokyo, 1993.
- [2]. S. Aksoy ve O. A. Tretyakov, "The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal," IEEE Trans. on Antennas Propagat., vol. 52, No. 1, s. 263-270, Oca. 2004.
- [3]. S. Aksoy, O. A. Tretyakov, Study of a Time Variant Cavity System, J. Electromagn. Waves Appl., Vol. 16, No. 11, s. 1535-1553, Kas. 2002.
- [4]. http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/matrixexponential/MatrixExponentialBib/Links/MatrixExponentialBib_Ink_2.html