

FİZİKSEL OPTİK İNTEGRALİNİN RADON TRANSFORMU YORUMU

Deniz Bölükbaş, A.Arif Ergin

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze, Kocaeli.

deniz_b@ttnet.net.tr , aergin@gyte.edu.tr

ÖZET

Bir nesneden saçılan alanların bulunabilmesi için, etkiyen elektromanyetik dalga sonucu nesnenin yüzeyinde indüklenen akımların bilinmesi ve saçılan alan integralinin yüzey üzerinde hesaplanması gerekmektedir. Nümerik yöntemlerde akım dağılımları üçgenler gibi basit geometrik yapılar üzerinde belirlenmekte ve saçılan alanlar nümerik integrasyon ya da asimptotik yöntemlerle hesaplanmaktadır. Bu bildiride, düzlemsel dalganın etkidiği üçgenler üzerinde indüklenen akımlar fiziksel optik yöntemi ile bulunduğundan, saçılan alanların uzak alandaki formülasyonu fiziksel optik (PO) integrali olarak adlandırılmaktadır. Sonucunu bulmak için PO integrali zaman uzayına geçirilerek Radon transformu olarak yorumlanmıştır ve üçgen yüzey üzerinde alındığında kapalı formdaki tam analitik sonuca ulaşılmıştır. Sonuçların doğruluğu ve hızlı radar kesit alanı hesaplamadaki başarısı uygulamalarla gösterilmiştir.

1. GİRİŞ

Bir cismin yüzeyine çarpan elektromanyetik dalga, cismin yüzeyinde akımlar indüklenmesine sebep olur. Bu akımlar saçılan alanları oluşturur. Saçılan alanların hesaplanması için bu bildiride önerilen yöntemle PO integrali zaman uzayında Radon transformu uygulanarak analitik olarak hesaplanmaktadır. Bir üçgenin Radon transformu, ters saçılma durumunda gelen dalganın dalga yüzeyi (*wavefront*) ile üçgenin arakesiti olan doğru parçasının uzunluğunun zamana göre değişimidir ve sonuç yine bir üçgendir. Bu yeni üçgenin ters Fourier transformu alınmakta ve bu yolla tekrar frekans uzayına geçilerek kapalı formdaki tam analitik çözüme ulaşılmaktadır.

2. PO İNTEGRALİ VE TAM ÇÖZÜM

PO integrali özel olarak kaynak ve gözlem noktası uzak alanda, yani saçıcıdan $r > 2D^2/\lambda$ uzaklığındayken elde edildiğinden etkiyen alanın düzlemsel dalga olduğu varsayılmıştır. Uzak alan şartında D kaynağı veya saçıcıyı içine alan en küçük kürenin çapı ve λ dalgaboyunu göstermektedir. Gelen dalga $\hat{\mathbf{p}}_i$ polarizasyonunda, E_i genliğinde ve $\hat{\mathbf{k}}_i$ yönünde ilerleyen bir düzlemsel dalga ise elektrik alan ifadesi; $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{p}}_i E_i \exp(-jk\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r})$, manyetik alan ifadesi ise $\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \eta_0^{-1} E_i \hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{p}}_i \exp(-jk\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r})$ şeklindedir. Burada $k = 2\pi/\lambda$ dalga sayısı, η_0 ise boşluğun karakteristik empedansıdır. Bu manyetik alan, mükemmel elektrik iletken bir saçıcı yüzeyi S üzerinde $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ akım yoğunluğunu oluşturur. Fiziksel optik yaklaşımında, S yüzeyinden dışarıya doğru olan yüzey normali $\hat{\mathbf{n}}$ kullanılarak akım yoğunluğu

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = 2\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}}_i \times \eta_0^{-1} E_i = 2\eta_0^{-1} E_i \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{p}}_i \exp(-jk\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}) \quad r \in \text{Aydınlık yüzey} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Saçılan alan $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ akım yoğunluğunun oluşturduğu alandır ve $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{k}}_s$ gözlem noktasındaki değeri,

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{jk\eta_0} \nabla \times \nabla \times \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2)$$

formülü ile bulunur. Gözlem noktasının uzak alanda olduğu varsayımı ile $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ için basitleştirilmiş formül

$$\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{j}{\lambda} E_i \hat{\mathbf{k}}_S \times \hat{\mathbf{k}}_S \times \hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{p}}_i \times \int_{S_l} \hat{\mathbf{n}} e^{jk(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_S) \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' . \quad (3)$$

olarak bulunur. Denklem (3) ile ifade edilen eşitlik PO integralidir. Bu integralin sonucunun bulunması için öncelikle S yüzeyi geometrik olarak tanımlanmalı ve yüzeyin aydınlık olan kısmı, S_l , belirlenmelidir. Aydınlık yüzey birbiriyle çakışmayan S_n , ($n = 1, \dots, N$) üçgen yüzeylerinden oluşuyorsa $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$ şu şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{j}{\lambda} E_i \hat{\mathbf{k}}_S \times \hat{\mathbf{k}}_S \times \hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{p}}_i \times \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}}_n h_n(\omega) \quad (4)$$

Burada $\hat{\mathbf{n}}_n$, S_n yüzeyinin dışına doğru yüzey normalidir ve $h_n(\omega)$ şu şekilde tanımlanır.

$$h_n(\omega) = \int_{S_n} e^{jk(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_S) \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = \int_{S_n} e^{j\omega(2/c)\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' . \quad (5)$$

Bu denklem de $\mathbf{k}_r = (\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_S)/2$ şeklinde yeni bir vektör tanımlanmıştır. Denklem (5)'te $h_n(\omega)$ değerini hesaplamak için bilinen nümerik yöntemler, cisim modelleyen üçgenlerin kenar uzunluklarının dalgaboyuna göre çok kısa olmasını gerektirir. Örneğin, iyi bilinen bir yöntem olan yedi noktalı Gauss-Legendre Quadrature (GLQ7) yöntemi ile yapılan hesaplama, üçgeni çevreleyecek en küçük dairenin yarıçapı h olmak üzere h^6 mertebesinde bir hataya sebep olur. Bu çalışmadaki karşılaştırmalarda cisimler, GLQ7 yönteminde, maksimum üçgen kenar uzunluğu $\lambda/6$ dan daha kısa olacak şekilde modellenmiştir. Denklem (5) ile verilen $h_n(\omega)$ değerinin analitik sonucunun bulunabilmesi için zaman uzayı ifadesi $h_n(t)$,

$$h_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \int_{S_n} \delta\left(t - \frac{2}{c} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}'\right) d\mathbf{r}' \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. $h_n(t)$, S_n ile belirlenmiş üçgenin $\mathbf{k}_r$ yönündeki Radon transformudur. Radon transformu, zaman eksenini boyunca bakış açısına dik ve $2\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}' = ct$ ile tanımlanan düzlemle üçgen yüzeyi S_n 'in arakesiti olan doğrunun uzunluğudur. İntegral alanı olan üçgenin köşeleri $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ve alanı A_{Sn} olmak üzere Şekil 1'deki zaman eksenini değerleri, $t_i = 2c^{-1} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$ formülü ile bulunur. Sonuçta $h_n(t)$,

$$h_n(t) = \begin{cases} \frac{2A_{Sn}}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)} \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)} & ; \quad t_1 < t \leq t_2 \\ \frac{2A_{Sn}}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_3)} \frac{(t - t_3)}{(t_2 - t_3)} & ; \quad t_2 < t \leq t_3 \\ 0 & ; \quad \text{diğer hallerde} \end{cases} . \quad (7)$$

olarak bulunur. Denklem (7)'nin ters Fourier dönüşümü alınarak $h_n(\omega)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_n(\omega) = \begin{cases} \frac{2A_{sn}}{\omega^2} \left[\frac{e^{-j\omega t_1}}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_3)} + \frac{e^{-j\omega t_2}}{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} + \frac{e^{-j\omega t_3}}{(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)} \right] & ; t_1 \neq t_2 \neq t_3 \\ \frac{2A_{sn}}{\omega^2} \frac{e^{-j\omega t_2} (j\omega t_2 - j\omega t_i + 1) - e^{-j\omega t_i}}{(t_2 - t_i)^2} & ; t_k = t_2 \neq t_i \\ A_{sn} e^{-j\omega t_2} & ; t_1 = t_2 = t_3 \end{cases} \quad (8)$$

Bu eşitlikle ilgili olarak şu gözlemler yapılabilir. (i) Fiziksel optik integralinin tam analitik kapalı formdaki çözümü hem zaman hem de frekans uzayında ifade edilebilmektedir. (ii) Bu eşitlik bistatik sistem için yazılmıştır. Monostatik sistemde $\hat{\mathbf{k}}_s = -\hat{\mathbf{k}}_i$ olacağından $\hat{\mathbf{k}}_r$ vektörü $\hat{\mathbf{k}}_i$ ye eşit olacaktır. (iii) Denklem (8)'deki ifade üçgenlerin kenar uzunluğuna yada kullanılan frekansa bağlı olmadığından saçıcı cismin boyutlarının büyük olması (numeric integrasyonda olduğunun aksine) işlem yükünü artırmaz.

4. UYGULAMALAR

Bu bölümdeki uygulamalarda sonuçlar hem doğruluk hem de işlem hızları dikkate alınarak karşılaştırılmaktadır. Cisimlerin Radar Kesit Alanı (RKA; *Radar Cross Section-RCS*)

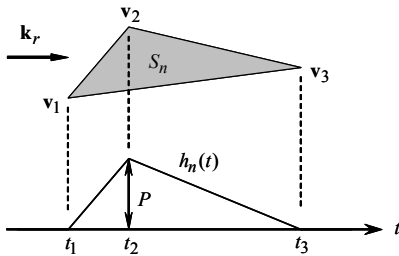
$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 |\mathbf{E}_s|^2 / |\mathbf{E}_i|^2$ formülü ile hesaplanarak sonuçlar grafiklerle gösterilmektedir.

Analitik ve nümerik yöntemlerle bulunan RKA değerleri küre ve kare plaka gibi kanonik yapılar için karşılaştırılmıştır. Örneğin, kenar uzunluğu a olan bir plakanın PO yöntemiyle hesaplanan bistatik RKA değeri [1]'de verilmiştir. Kenar uzunluğu $a = 5\lambda$ olan xy düzlemindeki bir kare plaka $\hat{\mathbf{k}}_i = \sin(150^\circ)\hat{\mathbf{y}} + \cos(150^\circ)\hat{\mathbf{z}}$ yönünde ilerleyen bir düzlemsel dalga ile aydınlatıldığında bistatik RKA değerleri hesaplanmış ve sonuçlar Şekil'2 de gösterilmiştir. Nümerik hesaplama için kare plaka iki üçgenle modellenmiş ve GLQ7 ve Radon transformu (RT) yöntemleri ile nümerik sonuçlar alınmıştır. RT yöntemi iki üçgen için hesaplama yaparken GLQ7 yöntemini kullanabilmek için üçgenleri bölünmesi gerekmiş ve üçgen sayısı 4096 ya ulaşmıştır.

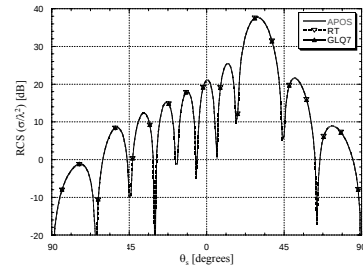
İkinci olarak mükemmel elektrik iletken bir yüzeye sahip 59 m uzunluğundaki bir yolcu gemisi modelinin $f = 10$ GHz için RKA değerleri hesaplanmıştır. Gemiye modellemek için 60978 üçgen kullanılmıştır. Üçgen sayısı GLQ7 yöntemi kullanıldığında 905 milyona varmaktadır. Sonuçlar tutarlı olmakla beraber toplam işlem süresi bu dört açı için GLQ7 yönteminde yaklaşık 4.5 saat, Radon transformuyla ise 17.5 dakika olmuştur.

5. SONUÇLAR

Bu bildiride kaynak ve gözlem noktasının uzak alanda olduğu durumda fiziksel optik integralinin analitik tam çözümü için yeni bir yöntem sunulmuştur. Frekans uzayında alınması gereken yüzey integrali zaman uzayına geçirilerek Radon transformu olarak yorumlanmış ve sonuçlar üçgen yüzey için kapalı formda bulunabilmektedir. Herhangi bir yüzey şekli üçgenlerle kolayca modellenebileceği için bu yeni yöntem her farklı yüzey şekli için uygulanabilmektedir.



Şekil 1 S_n üçgeninin $\mathbf{k}_r$ yönündeki Radon transformu



Şekil-2 $5\lambda \times 5\lambda$ boyutunda plakanın bistatik RKA değeri.

Kaynaklar

- [1] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley and Sons, 1989.