

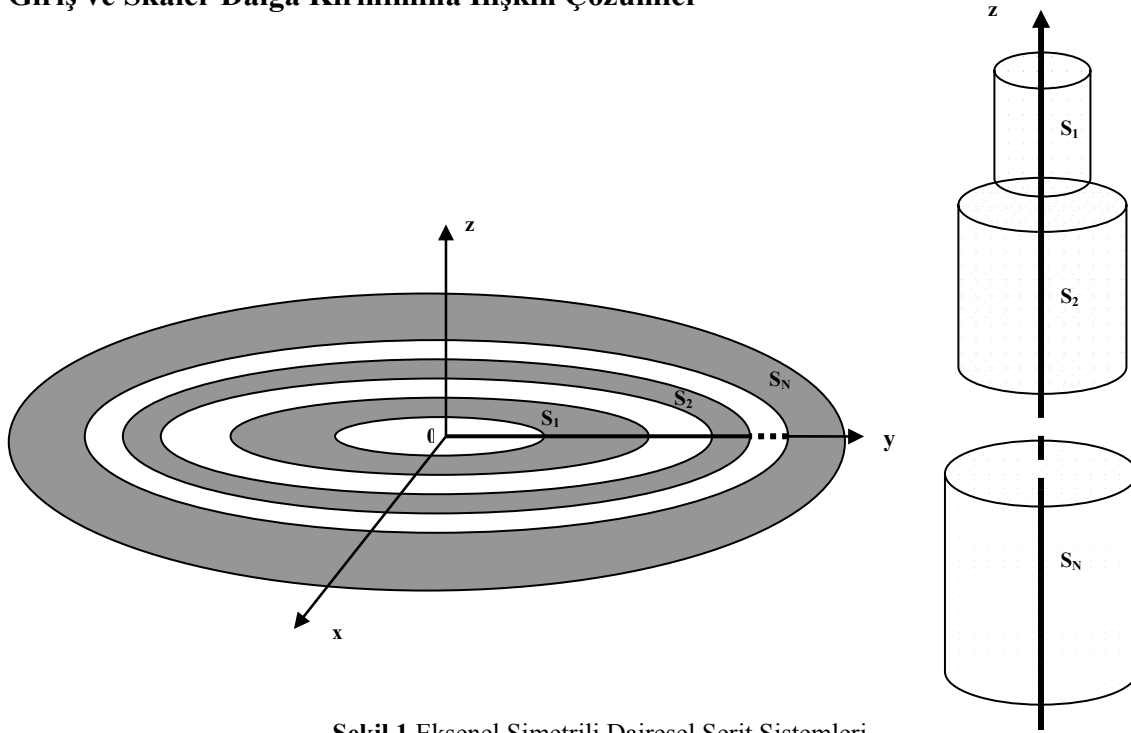
Eksenel Simetrik Dairesel Şeritlerden Dalga Kırınımı için Analitik Regülerleştirme Yöntemi

Fatih Dikmen, Yury A. Tuchkin
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze, Kocaeli

dikmen@gyte.edu.tr, tuchkin@gyte.edu.tr,

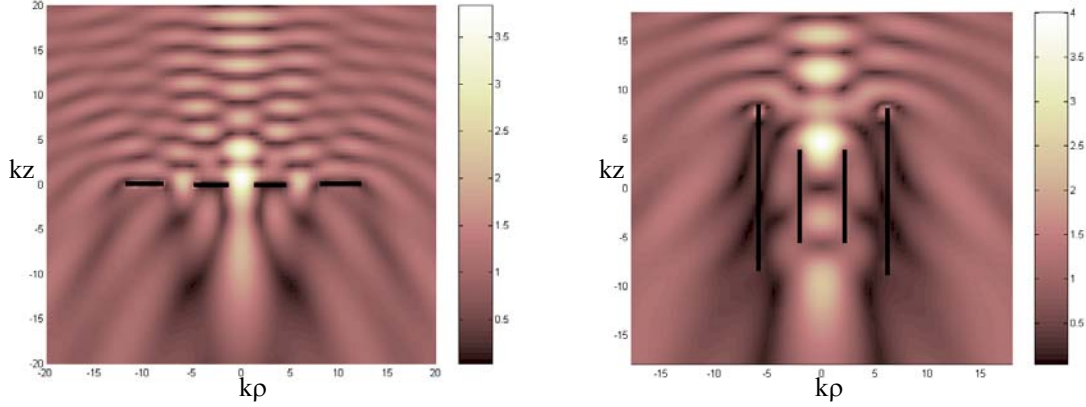
Özet: Logaritmik tekillikli skaler Fredholm birinci tür entegral denkleminde indirgenen dalga kırınımı problemlerine örnek olarak, Fresnel merceği antenlerinin kanonik yapısı olan, sonlu dairesel silindirik ve dairesel halka geometrilerinden dalga kırınımı problemleri verilebilir. Skaler veya elektromagnetik dalga kırınımı problemi, yukarıda anılan tipteki denklemleri Ortogonal Polinomlar Yöntemi ve Analitik Regülerleştirme Yöntemi aracılığı ile matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak verimli ve de başlangıçtaki sınır değeri probleminin çözümüne denk bir çözüme ulaştırılabilir. Bu, l_2 uzayında I ve H sırasıyla birim ve kompakt operatörler olmak üzere $(I+H)x=b$ ($x, b \in l_2$) biçiminde ikinci türden sonsuz lineer cebrik denklemleri keserek, ilkesel olarak istenilen yaklaşığa bulunabilecek bir çözümdür.

1. Giriş ve Skaler Dalga Kırınımına İlişkin Çözümler



Şekil 1 Eksenel Simetrik Dairesel Şerit Sistemleri

Özellikle milimetrik dalga boylarında uygulama sahası bulan, Fresnel merceği antenleri ([1], [2]) Şekil 1’de verilen sonsuz ince dairesel şeritler yardımı ile modellenebilir. Bu şekillerden Helmholtz denklemini sağlayan skaler dalga kırınımına ilişkin Dirichlet sınır değeri problemi, Şekil 1’deki ilk şekil için [3]’te, ikinci şekil için ise [4]’te tek şerit için yer alan çözümler geliştirilerek ele alınabilir (Şekil 2). Buna, önce ilişkin sınırda yazılmış olan Fredholm birinci türden entegral denklemini, denklem terimlerini Fourier serilerine açıp her yatay açı indisi için ortaya çıkan denklemleri Ortogonal Polinomlar Yöntemi (OPY) yardımıyla yine birinci türden olan lineer cebrik denklem sistemine indirgemek ile başlanmıştır. Sonrasında bu denklem sistemine Analitik Regülerleştirme Yöntemini (ARY) uygulayarak elde edilen, l_2 uzayında I ve H sırasıyla birim ve kompakt operatörler olmak üzere $(I+H)x=b$ ($x, b \in l_2$) biçiminde ikinci türden sonsuz lineer cebrik denklemleri keserek, matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak verimli ve de başlangıçtaki sınır değeri probleminin çözümüne denk bir çözüme varılmıştır.



Şekil 2 –z yönünde gelen skaler düzlemsel dalga ile aydınlatılmış dairesel şeritlerin yakınındaki toplam alanlar

2. Elektromagnetik Dalga Kırınımı

Önceki bölümde anılan türdeki skaler integral denklemlere indirgenebilen vektör problemler, orada sözü geçen yöntemlerin genelleştirilmesi ile çözülebilir. Buna örnek olarak Şekil 1’deki ilk şekle ilişkin elektromagnetik dalga kırınımı problemi verilebilir [5]. Ele alınan yüzeyde, kaynaklar ve saçılan alana ilişkin magnetik vektör potansiyelin z bileşeni bulunmadığı için bu problem yüzey üzerinde yazılmış olan aşağıdaki denklemlerin çözümüne indirgenebilir (S yüzeyi burada N adet halkasal şeritin oluşturduğu yüzeydir):

$$\begin{aligned} [\Delta_t + k^2] \psi^s &= -\frac{\partial E_z^i}{\partial z}, & (1) \\ \int_S J(p)G(q, p)dS &= (ik)^{-1} [\text{grad}_2 \psi^s(q) - E_T^i(q)]; & q \in S \quad (2) \end{aligned}$$

(1)’deki skaler Helmholtz denkleminin çözümü olan ψ^s ve tüm diğer terimler, eksel simetri sayesinde Fourier serileri aracılığı ile ifade edilip, ψ^s (2)’deki vektör integral denkleminde yazıldıktan ve $J(p)$ akım yoğunluğu vektörüne ait gözlem noktası bileşenleri, integrasyon noktası bileşenleri cinsinden ifade edildikten sonra, $\rho \in [a_l, b_l]$ aralığını $t \in [-1, 1]$ aralığına tasvir eden pozitif türevli $\rho = \eta(t)$ parametrizasyonunu kullanarak, her yatay açı indisi için, aşağıdaki tipte eşlenmiş birinci türden logaritmik tekillikli ve Serbest Ayar Sabitleri (SAS) içeren denklem çifti elde edilir (l ‘inci halkasal şerit için, “ a_l, b_l ” iç ve dış yarıçaplar, $z_{1,2}^l(v)$: akım yoğunluğu bileşenlerine ilişkin bilinmeyenler, $\Phi_l^{\pm}(u)$: (1)’e ait lineer bağımsız çözümlerin radyal parçası, $(A, B)_l$: (1)’in radyal parçasının özel çözümü ile beliren bilinmeyen SAS, $b_l^+(u)$: kaynak terimini de içeren bilinen düzgün fonksiyon):

$$\int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| z_1^l(v) + \sum_{j=1}^N [K_1^{j,l}(u, v) z_1^j(v) + K_2^{j,l}(u, v) z_2^j(v)] \right\} dv = b_l^+(u) + A_l \Phi_l^{++}(u) + B_l \Phi_l^{+-}(u),$$

$$u \in [-1, 1], \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| z_2^l(v) + \sum_{j=1}^N [-K_2^{j,l}(u, v) z_1^j(v) + K_1^{j,l}(u, v) z_2^j(v)] \right\} dv = b_l^-(u) + A_l \Phi_l^{-+}(u) + B_l \Phi_l^{--}(u), \quad (4)$$

$$u \in [-1, 1], \quad l = 1, 2, \dots, N$$

Burada çekirdekte yer alan fonksiyonlar, $A_n^{1,2}(u)$ tamamen düzgün fonksiyonlar, $H_3^{1,2}(u, v)$ ise üçüncü mertebeye kadarki tüm kısmi türevleri ile birlikte sürekli ve sadece kısmi dördüncü türevinde logaritmik tekilliği olan fonksiyonlar olmak üzere şu biçimdedir:

$$K_{1,2}^{j,l}(u, v) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \ln|u-v| \sum_{n=2}^3 A_n^{1,2}(u) |u-v|^n \right\} - \frac{1}{\pi} H_3^{1,2}(u, v) \quad (5)$$

Elde edilen denklem çiftinde SAS dışındaki bilinmeyenler, $h_l^n(v)$ Hölder sınıfından düzgün fonksiyonlar olmak üzere şu biçimdedir:

$$z_n^l(v) = (1-v^2)^{\frac{(-1)^{(n-1)}}{2}} h_l^n(v), \quad n=1,2; \quad v \in (-1,1). \quad (6)$$

Bunlardan $z_l^l(v)$ 'e ilişkin ayırıt koşulları uyarınca bu fonksiyon ayırıtarda ($v=\pm 1$) sıfıra eşit olmalıdır (6). Öte yandan (3) ve (4)'e ilişkin çözümler, $\tilde{h}_l^{1,2}(v)$ Hölder sınıfından düzgün fonksiyonlar olmak üzere,

$$z_{1,2}^l(v) = (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} \tilde{h}_l^{1,2}(v), \quad v \in (-1,1) \quad (7)$$

biçiminde aranmaktadır ve $z_l^l(v)$ 'e ilişkin koşul aracılığı ile, SAS $(A, B)_l$, $\tilde{h}_l^1(v) = 0$ yapılarak ayarlanmalıdır. Bu dikkate alındığında, (3) ve (4) skaler problemdeki adımların doğrudan genelleştirilmesi yardımıyla aşağıdaki ikinci türden lineer cebrik denklem sistemine varılır:

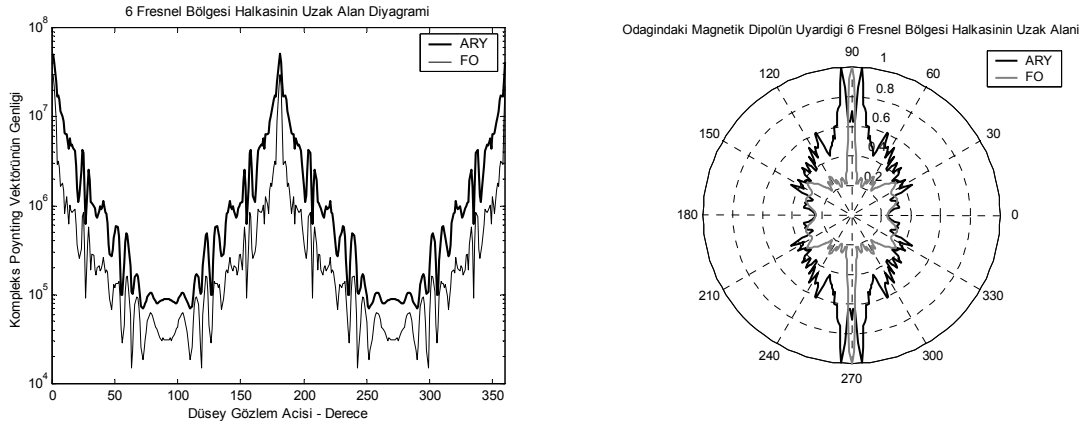
$$y_n^{1,l} + \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} (\hat{k}_{ns}^{1,jl} y_s^{1,j} + \hat{k}_{ns}^{2,jl} y_s^{2,j}) = \hat{b}_n^{+,l} + A_l \hat{\phi}_n^{+,l} + B_l \hat{\phi}_n^{+-,l},$$

$$y_n^{2,l} + \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} (\hat{k}_{ns}^{1,jl} y_s^{2,j} - \hat{k}_{ns}^{2,jl} y_s^{1,j}) = \hat{b}_n^{-,l} + A_l \hat{\phi}_n^{+-,l} + B_l \hat{\phi}_n^{-,l}, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} Q_s^{(\pm),jl} y_s^{1,l} = \tilde{b}_l^{(\pm)} + A_l P_+^{(\pm),l} + B_l P_-^{(\pm),l},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad l = 1, 2, \dots, N$$

Elde edilen matematiksel olarak güçlü çözümler ile fiziksel optik yöntemi gibi yaklaşık çözümler karşılaştırıldıklarında, uyarıma düzlemsel dalgalardan farklılaştıkça yaklaşık çözümlerin doğruluklarını yitirdikleri ortaya çıkmaktadır. Bu Şekil 3'te de gözlenmektedir.



Şekil 3 Solda, $-z$ yönünde gelen düzlemsel dalga ile aydınlatılmış, sağda ise magnetik dipol ile uyarılmış 6 Fresnel bölgesi halkası için uzak alanlar

Kaynaklar

- [1]. C.F. Ye, S.Y. Tan, "A Reflective Half- Cylindrical Fresnel Zone Plate Antenna with Low Backward Radiation for Wireless LAN". Microwave and Optical Technology Letters, Vol.26, No: 4, 20 Ağustos 2000.
- [2] H.D. Hristov, D. Feick, W. Grot, P. Fernandez. "Indoor Signal Focusing by Means of Frensel Zone Plate Lenz Attached to Building Wall". IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Vol 52, No. 4, Nisan 2004.
- [3]. Tuchkin Y. A., Karaçuha E., Dikmen F. "Scalar Wave Diffraction by Perfectly Conductive Infinitely Thin Circular Ring" Elektrik. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Science, TUBITAK Doğa Serisi. (Vol 9, No:2 2001)
- [4]. Özkan E., Dikmen F., Tuchkin Y. A. "Scalar Wave Diffraction by Perfectly Soft Thin Circular Cylinder of Finite Length ; Analytical Regularization" Elektrik. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Science, TUBITAK Doğa Serisi. (Vol 10, No:3 2002)
- [5]. Dikmen F. "Eksenel Simetrik Sonsuz İnce Yassı Dairesel Halka Sisteminden Elektromagnetik Dalgaların Kırınımı" Doktora Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Kocaeli, 2004.