Kapalı-Form Green Fonksiyonları- Yöntem, Sorunlar and Uygulamalar

M. I. Aksun
Koç Üniversitesi
Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü
Sarıyer, Istanbul
iaksun@ku.edu.tr,

Özet: *Kapalı-form Green fonksiyonları (Closed-Form Green's Functions-CFGF), vektör ve sayıl potansiyeller için çok katmanlı düzlemsel ortamlarda geliştirilmişlerdir. Bu metodun basit adımlardan oluşan bir özeti, ve literatürde sıkca gündeme getirilen bazı sorunları bu bildiri kapsamında değerlendirilmiş, ve bu sorunların ne kadar gerçekci olduğu, ve eğer gerçekci ise bunların çözümleri sunulmuştur. Buna ek olarak, bu metodun momentler metodu (Method of Moments-MoM) ile birlikte kullanılmasındaki zorluklar ve avantajlar belirtilmiş, ve bu konudaki son gelişmelerle birlikte halen açık olan problemler vurgulanmıştır.*

1. Giriş

Çok katmanlı düzlemsel yapılar son otuz yılda mikrodalga ve antenler konusundaki gelişmelerin temel taşlarından birini oluşturmaktadır, ve bunlara örnek olarak mikrodalga tümdevreleri ve mikroşerit antenler gösterilebilir. Bunun doğal sonucu olarak, elektromanyetik, mikrodalga ve anten konularında yapılan araştırmaların önemli bir kısmı bu tür yapıların analiz ve tasarımı üzerine yoğunlaşmıştır. Bilgisayarların hızlarındaki artışa paralel olarak doğru ama nümerik olarak karmaşık yöntemler bu tür yapıların analiz ve tasarımında ön plana çıkmışlardır. Bunlardan en yaygın kullanılanlar, zaman uzayında sonlu farklılıklar metodu (FDTD), sonlu elemanlar metodu (FEM) ve momentler metodu (MoM) sayılabilir. Çok katmanlı düzlemsel ortamlarda tasarlanan küçük ve orta büyüklükteki (dalga boyu cinsinden) yapıların analizi için MoM öne çıkmaktadır. Momentler metodunun bir elektronayetik probleminin analizi için olan uygulamasında yazılan integral denklemler, ister spektral uzayda ister uzamsal uzayda yazılsın, problemin noktasal kaynağa olan tepkisini veren Green fonksiyonları cinsinden yazılır. Yani, çok katmanlı düzlemsel ortamın elektriksel özelliklerini içeren Green fonksiyonları momentler metodunun elektromanyetik uygulamalarında değişmez parametredir, ve bu metodun uygulanabilmesi için önceden bilinmesi gerekmektedir. Green fonksiyonları bu tip geometriler için spektral uzayda analitik olarak bulunabilirler ve uzamsal uzaya iki boyutlu Fourier dönüşümü veya bir boyutlu Hankel dönüşümü aracılığı nümerik olarak çevrilirler. Spektral uzayda Green fonksiyonlarının çıkarılması ve bu dönüşümlerin iyi bilinmesine karşın, bu yöntem nümerik olarak verimli olmadığı için tercih edilmez. Bunun ana nedeni Hankel dönüşümünün salınımsal olması ve spektral uzayda yazılan Green fonksüyonlarının yavaş azalan fonksiyonlar olması gösterilebilir. Bu problemin üstesinden gelmek için Hankel dönüşümünü verimli yapmaya yarayan bir yaklaşım, tek kalın katmanlı bir geometri için, önerilmiş ve böylece uzamsal uzayda da vektör ve sayıl potansiyellerin Green fonksiyonlarının analitik olarak yaklaşık yazılabileceği gösterilmiştir [1,2]. Bu yöntem "kapalı-form Green fonksiyonları-KFGF" (closed-form Green's functions-CFGF) veya "ayrık karmaşık imge metodu" (Discrete complex image method-DCIM) diye adlandırılmış ve günümüze kadar olan bir seri çalışmayla çok katmanlı genel düzlemsel geometriler için nümerik olarak verimli bir hale getirilmiştir [3-6].

KFGF yöntemi, temel olarak, spektral uzayda analitik olarak yazılabilen Green fonksiyonlarını karmaşık üstel fonksiyonlar olarak yazarak (yaklaşık olarak) Sommerfeld özdeşliği yardımı ile Hankel dönüşümünü analitik olarak yapmaktır. Bu yöntemin en önemli noktası, spektral Green fonksiyonlarını yaklaşık yazmak için kullanılan üstel fonksiyonların karmaşık mesafeli küresel dalgalara karşılık gelmesi, ve bunun da bir dipol'ün doğal dalga yapısı olmasıdır. Bununla beraber, bir dipol katmanlı geometrilerde başka dalga tipleride oluşturmaktadır: silindirik ve konik gibi. Bu dalgalar küresel olmadıkları için küresel dalgalarla çok iyi tanımlanamaz ve yaklaşık olarak belli bir doğruluktan daha iyi, bu dalgaların etkin oldukları bölgelerde, yazılamazlar. Bunun bir çözümü, bu dalgaların spektral uzaydaki matematiksel tanımlarını bulup, KFGF yöntemi kullanılmadan önce çıkarmaktır. Bu işlem her zaman olası olmadığından, genelde bu yöntemle elde edilen Green fonksiyonları kaynaktan uzaklaştıkca doğruluklarını kayberderler. Bu problem literatürde değişik şekillerde yorumlandığından, ve bunun orijinal olarak önerilen yöntemin bazı adımlarından kaynaklandığı öne sürüldüğünden, KFGF metodunun bu hatayı oluşturduğu düşünülen adımları incelenecek ve hatanın kaynağı tesbit edilecektir.

2. Kısaca Yöntem

Bu bildiride KFGF yöntemini tanıtmak ve uygulamısını anlamak için çok katmanlı genel bir geometri kullanıldı, ve kaynak yatay elektrik dipol (YED) olarak katman-i ve katman-(i-1) ara yüzeyinden 'h' kadar yükseğe kondu. Vektör ve sayıl potansiyel Green fonksiyonlarından x-yönündeki sayıl potansiyel G_x^q örnek olarak seçildi ve KFGF yönteminin adımları bunun üzerinde gösterildi. Spektral uzayda Green fonksiyonları literatürde detaylı olarak çalışıldığı ve var oldukları için G_x^q 'nin matamatiksel formu doğrudan [5]'dan aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\widetilde{G}_x^q = \frac{1}{2j\varepsilon_i k_{zi}}\left[e^{-jk_{zi}|z|} + \frac{k_{zi}^2 B_h^e + k_i^2 A_h^e}{k_\rho^2} e^{jk_{zi}z} + \frac{k_i^2 C_h^e - k_{zi}^2 D_h^e}{k_\rho^2} e^{-jk_{zi}z}\right] \quad (1)$$

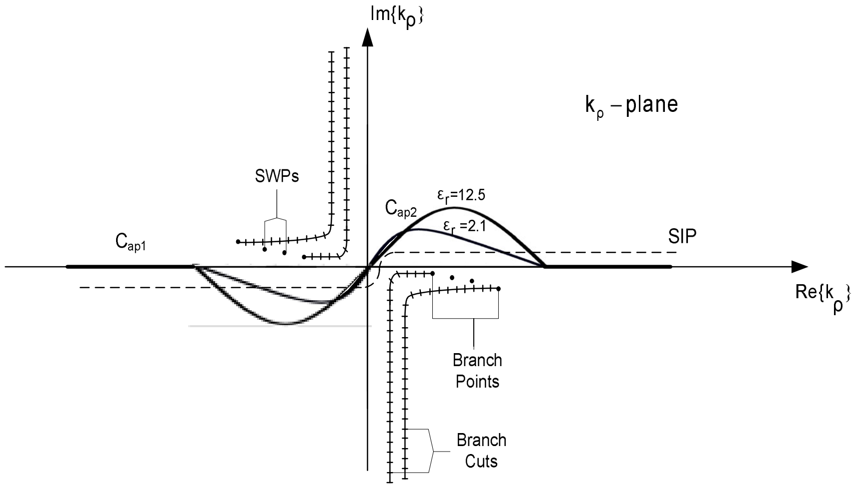
burada ~ spektral uzayı gösterir, $k_{zi} = \sqrt{k_i^2 - k_\rho^2}$, ve A_h^e, B_h^e, C_h^e ve D_h^e genelleştirilmiş yansıma katsayısı $\widetilde{R}_{TE,TM}$ 'in fonksiyonlarıdırlar. Spektral uzayda bulunan bu Green fonksiyonunu uzamsal uzaya çevirmek için Hankel transform kullanılır. Bu tanımlardan sonra, KFGF yöntemi aşağıdaki adımlarla basitce verilebilir [6]:

a. Spektral uzayda verilen Green fonksiyonunu örnekle. Bu adım için iki yaklaşım izlenebilir: (i) Örnekleme yapmadan önce yarı-statik ($\widetilde{G}_{yarı-statik} = \lim_{k_0 \to 0} \widetilde{G}$) ve yüzey-dalga ($\widetilde{G}_{sw}$) katkıları spektral uzayda analitik olarak belirlenir ve $\widetilde{G}_x^q$ den çıkarılır. Böylece geri kalan düzgün kısım $\widetilde{G} - \widetilde{G}_{yarı-statik} - \widetilde{G}_{sw}$ örneklenir; veya (ii) doğrudan eşitlik (1)'in köşeli parantez içinde kalan kısmı sabit z değerleri için örneklenir. Her iki yaklaşımda da örnekleme, aşağıda verilen parametrik eşitlikler tarafından belirlenen yol üzerinde yapılır:

$$k_{zi} = -jk_i[T_{02} + t] \qquad 0 \le t \le T_{01} \quad C_{ap1} \text{ yolu boyunca: 1. düzey} \quad (2a)$$

$$k_{zi} = k_i\left[-jt + \left(1 - \frac{t}{T_{02}}\right)\right] \qquad 0 \le t \le T_{02} \quad C_{ap2} \text{ yolu boyunca : 2. düzey} \quad (2b)$$

Bu parametrik eşitliğe karşı gelen yol ve Green fonksiyonlarının bazı özellikleri k_ρ -düzleminde Şekil-2'de gösterilmişlerdir. Çok katmanlı düzlemsel geometrilerde, dal noktası yarı açık olan katmanların dalga numarasında, yani $k_\rho = k_{(0)}, k_{N-1}$, ve yüzey dalga kutupları da verilen geometrideki en küçük ve en büyük dalga numaraları arasındadır.



Şekil 1. k_ρ -düzleminde örnekleme yolları ve Green fonksiyonunun bazı özellikleri.

b. Spektral uzayda verilen Green fonksiyonlarını karmaşık üstel fonksiyonlar cinsinden yaz. Bu işlem genelleştirilmiş kalem-fonksiyon (generalized pencil of function-GPOF) yöntemi ile yapılmaktadır.

$$\widetilde{G}_x^q \cong \widetilde{G}_{xx}^{q0} + \widetilde{G}_x^{qsw} + \underbrace{\frac{1}{j2\varepsilon_i k_{zi}}\left[\sum_{n=1}^{N_1} a_{1n} e^{-b_{1n}k_{zi}} + \sum_{n=1}^{N_2} a_{2n} e^{-b_{2n}k_{zi}}\right]}_{\cong \widetilde{G}_x^q - \widetilde{G}_x^{q0} - \widetilde{G}_x^{qsw}} \quad (3)$$

Üstel fonksiyonların katsayıları a_{1n} , a_{2n} , ve üstleri b_{1n}, b_{2n} karmaşık sayılardır, ve GPOF yöntemi tarafından bulunurlar.

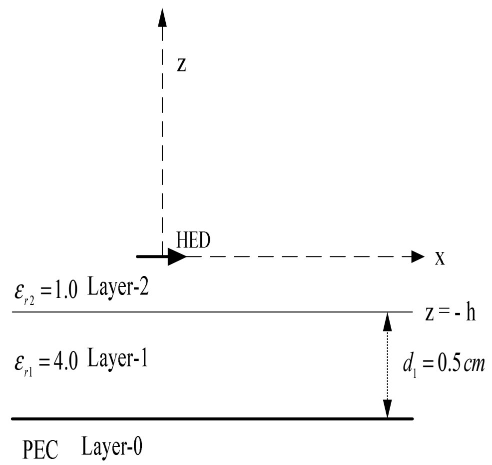
c. Uzamsal uzayda kapalı-form Green fonksiyonlarını Sommerfeld özdeşliği kullanarak yaz. Bu özdeşlik sayesinde uzamsal uzayda Green fonksiyonu kapalı form olarak elde edilir,

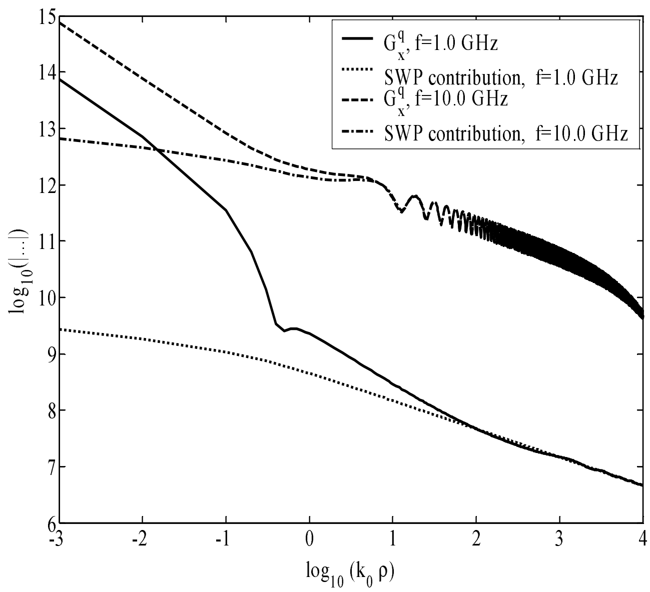
$$G_x^q \cong G_x^{q0} + G_x^{qsw} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_i}\left[\sum_{n=1}^{N_1} a_{1n}\frac{e^{-jk_i r_{1n}}}{r_{1n}} + \sum_{n=1}^{N_2} a_{2n}\frac{e^{-jk_i r_{2n}}}{r_{2n}}\right] \quad (5)$$

burada $r_{(1,2)n} = \sqrt{\rho^2 - b_{(1,2)n}^2}$ genel olarak karmaşık bir sayı olacağından, bu tanım ve böylece yöntem "ayrık karmaşık imge metodu" olarak da bilinir.

3. Olası Problemler ve Nedenleri

Öne sürülen problemlerin başında, eşitlik-3'de kullanılan üstel fonksiyonların elde edilişinde orijinal Green fonksiyonun, eşitlik-2, dal noktasını dikkate almadığı, ve bu nedenle eşitlik-3'ün dal noktası ile gerçek Green fonksiyonunun dal noktasının aynı olmaması gösterilmektedir [4]. Buna ek olarak bazı yayınlarda yarı-statik terimlerin baştan çıkarılmasının şart olduğu vurgulanmıştır. Kaynak [4]'de dal noktasının neden olduğu düşünülen erken bozulma aslında üstel yaklaştırma yapılırken yeteri kadar örnek almamaktan kaynaklanmiş olduğu sunum sırasında gösterilecektir. Örnekleme sıklığının artırılması tek başına bozulmayı ortandan kaldırmaya yetmemekle beraber bozulma mesafesini oldukca ileriye taşımaktadır. Bu kaynaktan uzak mesafelerde oluşan bozulmanın ana nedeni yüzey dalgalarının varlığıdır. Bilindiği gibi yüzey dalgaları silindirik dalgalar olup cebirsel olarak $1/\sqrt{\rho}$ ile azalan fonksiyonlar olmalarına karşın yaklaşım için kullanılan fonksiyonlar küresel olup $1/r$ ile azalmaktadır. Bu nedenle, kaynaktan uzakta ve katmanın yüzeyinde belirleyici dalga tipi silindrik olduğundan yaklaştırma için kullanılan küresel dalgalar hiç bir zaman bu dalgaları yeterince doğru tanımlayamayacaklardır. Bunula beraber, eğer bu tip dalgalar KFGF yöntemi kullanılmadan önce belirlenir ve Green fonksiyonundan çıkarılırsa, geriye kalan daha düzgün ve küresel olan dalgalar rahatlıkla kullanılan küresel dalgalar cinsinden yazılabilir. Bu duruma örnek olması açısından şekil-2(a) için yukarıda verilen adımlar uygulanmış (sadece yüzey dalga katkısı önceden çıkarılmıştır) ve elde edilen Green fonksiyonları iki ayrı frekans için şekil-2(b)'de yüzey dalga katkıları ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Yarı-statik terimlerin, yüzey dalgalarının ve dal noktalarının katkıları daha detaylı olarak sunumda ele alınacak, ve bu konuda açık olan problemler belirtilecektir.





Şekil 2. a) Örnek üç katmanlı düzlemsel geometri; b) iki ayrı frekansda Green fonksiyonu ve yüzey dalga katkıları.

Kaynaklar

[1]. D. C. Fang, J. J. Yang, and G. Y. Delisle, "Discrete image theory for horizontal electric dipoles in a multilayered medium," *Proc. Inst. Elect. Eng*., pt. H, vol. 135, pp. 297-303, Oct. 1988.
[2]. Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang and G. E. Howard, ``A Closed-Form Spatial Green's Function for the Thick Microstrip Substrate," *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech*., vol. 39, pp. 588-592, March 1991.
[3]. M. I. Aksun and R. Mittra," Derivation of closed-form Green's functions for a general microstrip geometry," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*., Vol. MTT-40, pp. 2055-2062, Nov. 1992.
[4]. R. A. Kipp and C. H. Chan, "Complex image method for sources in bounded regions of multilayer structures," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech*., vol. 42, pp. 860-865, May 1994.
[5]. G. Dural and M. I. Aksun, "Closed-form Green's functions for general sources and stratified media." *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 43, pp. 1545-1552, July 1995.
[6]. M. I. Aksun, "A Robust Approach for the Derivation of Closed-Form Green's Functions," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech*., vol. 44, pp. 651-658, May 1996.

M. İrşadi Aksun received the B.S. and M.S. degrees in Electrical and Electronics Engineering at the Middle East Technical University, Ankara, Turkey, in 1981 and 1983, respectively, and the Ph.D. degree in Electrical and Computer Engineering at the University of Illinois at Urbana-Champaign in 1990.

From 1990 to 1992, he was a post doctoral fellow in the Electromagnetic Communication Laboratory at University of Illinois at Urbana-Champaign. From 1992 to 2001, he was on the faculty of the Department of Electrical and Electronics Engineering at Bilkent University, Ankara, Turkey, where he was a Professor since 1999. In 2001, he has joined the Department of Electrical and Electronics Engineering at Koc University, Istanbul, Turkey, as a professor.

His research interests include numerical methods for electromagnetics, microstrip antennas, indoor and outdoor propagation models, and microwave and millimeter-wave integrated circuits.

M. İrşadi Aksun Elektrik Elektronik Mühendisliği Lisans ve Yüksek Lisans derecelerini sırasıyla 1981 ve 1983 yıllarında ODTÜ'den doktora derecesini ise 1990 yılında Illonois Üniversitesi Elektrik ve Bilgisayar Mühendisliği Bölümünden almıştır.

1990-1992 yılları arasında Illinois Üniversitesinde Elektromanyetik İletişim Labaratuvarında doktora sonrası çalışması yapmıştır. 1992'den 2000 yılına kadar Bilkent Üniversitesi Elektrik Elektronik Mühendisliği bölümünde görev almış ve 1999 yılında Profesörlüğe yükseltilmiştir. 2001 yılında Koç Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümüne katılmıştır.

Mikrostrip antenler, kapalı ve açık alan yayınım modelleri ve mikrodalga-milimetrikdalga entegre devreler araştırma ilgi alanları içindedir.