

Diyelektrik Cisimlerin İteratif Çözümünde İntegral Denklemi Formülasyonlarının İncelenmesi[†]

Özgür Ergül¹ ve Levent Gürel^{1,2}

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

²Bilişimsel Elektromanyetik Araştırma Merkezi (BİLCEM)

Bilkent Üniversitesi

TR-06800, Bilkent, Ankara

E-posta: ergul@ee.bilkent.edu.tr, lgurel@bilkent.edu.tr

Özet: Üç boyutlu homojen diyelektrik cisimlere ait elektromanyetik saçılım problemlerinin iteratif çözümleri incelenmiştir. Çeşitli formülasyon biçimleriyle elde edilen çözümler, verimlilik ve doğruluk bakımından birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Elde edilen bulguların mükemmel iletkenler için yapılan önceki çalışmaların sonuçlarıyla uyum içinde olduğu tespit edilmiştir.

1. Giriş

Elektromanyetik problemlerin sayısal analizlerinde problem boyunun büyümesiyle birlikte iteratif çözümlerin kullanılması gerekmektedir. Verimli bir iteratif çözümün öncelikle az sayıda iterasyon sayısı ile istenilen hassaslıkta doğru sonuca ulaşması beklenmektedir. Bu bakımdan, çözümün verimli olabilmesi için, kullanılacak olan iteratif yöntemin doğru olarak belirlenmesi ve sayısal tekniklerle elde edilen matris denklemlerinin yüksek çözülebilirliğe sahip olması gerekmektedir. Bir problemin çözülebilmesi için gerekli olan iterasyon sayısını pek çok unsur belirler. Homojen diyelektrik problemler için bunlardan bazıları cismin geometrik boyutları, şekli, elektriksel ve manyetiksel materyal özellikleri ve iletkenlik gibi parametrelerdir. Öte yandan, bu parametrelerin verilmesiyle birlikte çözümün hızını doğrudan doğruya uygulanan iteratif teknik ve elektromanyetik problemin tanımlanmasında kullanılan formülasyon belirler. Bu çalışmada, homojen diyelektrik cisimlere ait problemler için değişik formülasyon biçimleri ele alınmış ve bunların uygulanmasıyla elde edilen iteratif çözümler karşılaştırılmıştır.

Pek çok formülasyon arasından, hem iç rezonans probleminden etkilenmediklerinden, hem de kararlı sistemlerin oluşturulmasını sağladıklarından birleşik-T formülasyonu (BTF) (CTF: combined-T formulation), birleşik-N formülasyonu (BNF) (CNF: combined-N formulation), elektrik-manyetik akımı birleşik alan integral denklemi (EMABAİD) (JMCFIE: electric-magnetic current combined-field integral equation), ve değiştirilmiş normalize Müller formülasyonu (DNMF) (mN-Müller: modified N-Müller) denenmiştir. Dört farklı formülasyon biçimi değişik boyutlarda ve farklı cisimlere ait problemler üzerinde denenmiş ve birbirleriyle karşılaştırılmışlardır. Matris denkleminin elde edilebilmesi için yüzeyler üçgenlenmiş ve bilinmeyen elektrik ve manyetik akımlar Rao-Wilton-Glisson fonksiyonları ile açılmıştır. Özellikle iletkenlik, elektrik ve manyetik sabitleri gibi parametrelerin artırılmasıyla birlikte elde edilen sonuçların doğruluğu ve çözümlerin verimliliği incelenmiştir.

2. Homojen Diyelektrik Cisimlerin Yüzey Formülasyonları

Kapalı diyelektrik bir cisim için yüzey formülasyonlarında kullanılan operatörler

$$D_l\{\mathbf{X}\} = ik_l \int_S d\mathbf{r}' [\mathbf{X}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k_l^2} \nabla \nabla' \cdot \mathbf{X}(\mathbf{r}')] g_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1)$$

$$L_l\{\mathbf{X}\} = \int_{PV,S} d\mathbf{r}' \mathbf{X}(\mathbf{r}') \times \nabla' g_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2)$$

$$I_l\{\mathbf{X}\} = \mathbf{X} \quad (3)$$

[†]Bu çalışma, TÜBİTAK (105E172), Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

olarak tanımlanabilir. Bu denklemlerde $l = 1$ ve 2 cisme göre sırasıyla dış ve iç ortamlardır. Ayrıca k_l ve $g_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, sırasıyla l ortamındaki dalga numarasına ve Green fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Operatörlerin kullanılmasıyla, BTF ve BNF sırasıyla

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \begin{bmatrix} (D_1 + D_2)\{\mathbf{J}\} - \left\{ \eta_1^{-1}[L_1 + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}} \times I] + \eta_2^{-1}[L_2 - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}} \times I] \right\} \{\mathbf{M}\} \\ \left\{ \eta_1[L_1 + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}} \times I] + \eta_2[L_2 - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}} \times I] \right\} \{\mathbf{J}\} + (D_1 + D_2)\{\mathbf{M}\} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{t}} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1^{-1}\mathbf{E}^i \\ \eta_1\mathbf{H}^i \end{bmatrix} \quad (4)$$

ve

$$\hat{\mathbf{n}} \times \begin{bmatrix} (L_1 - L_2)\{\mathbf{J}\} - \mathbf{J} + (\eta_1^{-1}D_1 - \eta_2^{-1}D_2)\{\mathbf{M}\} \\ (-\eta_1D_1 + \eta_2D_2)\{\mathbf{J}\} + (L_1 + L_2)\{\mathbf{M}\} - \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i \\ -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i \end{bmatrix} \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerde, η ortamların empedansını, \mathbf{E}^i ve \mathbf{H}^i gelen elektrik ve manyetik alanları, \mathbf{J} ve \mathbf{M} ise diyelektrik cismin yüzeyi üzerinde tanımlanan elektrik ve manyetik akımları göstermektedir. BTF diyelektrik cismin sınırları üzerindeki teğet alanların doğrudan test edilmesiyle elde edilirken, BNF cismin yüzeyine dik vektörü kullanarak sınır koşullarını farklı bir biçimde uygulamaktadır. EMABAİD ise BTF ve BNF'nin uygun bir biçimde birleştirilmesiyle elde edilmektedir [1]. Son olarak DNMF, BNF'ye benzer bir biçimde N formülasyonudur, ancak matris elemanlarının farklı bir şekilde düzenlenmesiyle elde edilir [2].

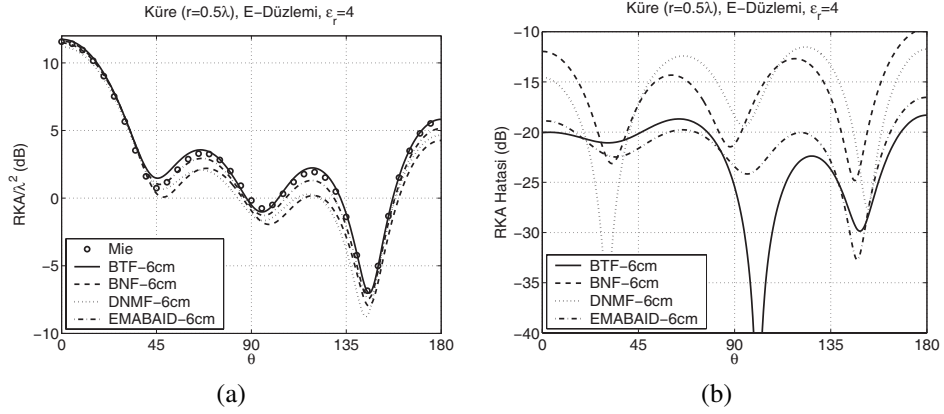
3. Sayısal Örnekler

Diyelektrik formülasyonlarının karşılaştırılması amacıyla 0.5λ yarıçapa sahip küreye ait saçılım problemi ele alınmıştır. Şekil 1(a)'da diyelektrik sabiti $\epsilon_r = 4$ olan küre için E-düzlemindeki bistatik radar kesit alanı (RKA) değerleri gösterilmiştir. Dört farklı formülasyondan elde edilen değerler Mie serilerinden hesaplanan analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca, referans Mie sonucuna göre hatalar da Şekil 1(b)'de gösterilmiştir. Şekil 1 incelendiğinde, en doğru değerlerin BTF ile elde edildiği gözlemlenmektedir. Ayrıca, N formülasyonlarından, yani BNF ve DNMF'den elde edilen değerlerin diğerlerine göre daha hatalı olduğu da görülmektedir. Bu durum mükemmel iletkenler için daha önce yapılan çalışmaların sonuçlarını destekler niteliktedir [3]. Şekil 2'de diyelektrik sabiti $\epsilon_r = 1 + 4i$ olan iletken bir kürenin E-düzlemindeki bistatik RKA değerleri ve Mie sonucuna göre hatalar gösterilmiştir. Bu sonuçlarda da, Şekil 1'de verilen sonuçlarla tutarlı bir biçimde, BTF'nin en doğru değerleri verdiği ve N formülasyonlarındaki hataların göreceli olarak daha yüksek olduğu gözlemlenmektedir.

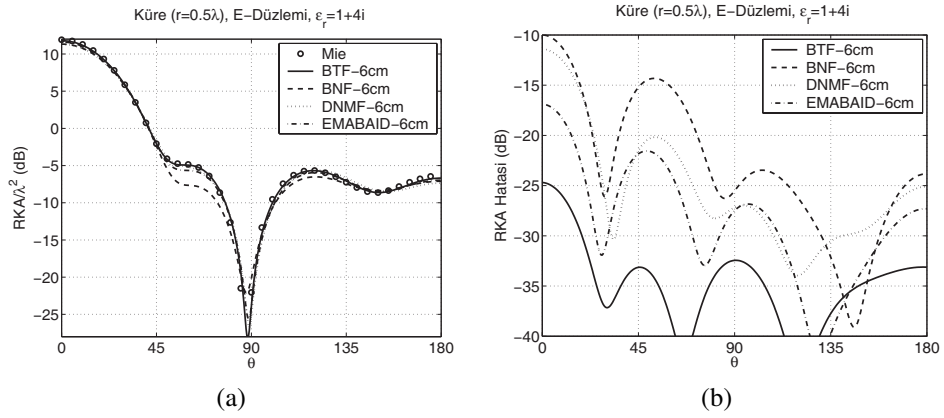
Diyelektrik formülasyonlarının verimliliğini karşılaştırmak amacıyla Şekil 3'te iteratif çözümler için gerekli olan iterasyon sayıları gösterilmiştir. Şekil 3(a) incelendiğinde, düşük diyelektrik sabitleri için N formülasyonlarının en hızlı yakınsamaya sahip olduğu anlaşılmaktadır. BTF ise yüksek iterasyon sayıları ile en verimsiz formülasyon olarak görülmektedir. Bu durum yine mükemmel iletkenler için daha önce yapılan çalışmalarla tutarlıdır [4]. Öte yandan, cismin kontrastı arttıkça ve diyelektrik sabiti yükseldikçe BNF'nin iterasyon sayısı yükselmekte ve bu yöntem hızla verimsiz hale gelmektedir. Bu durum göz önüne alındığında DNMF'nin verimlilik açısından en kararlı formülasyon olduğu sonucuna varılabilir. İletken küre için Şekil 3(b)'de verilen değerler de bu sonucu desteklemektedir.

Kaynaklar

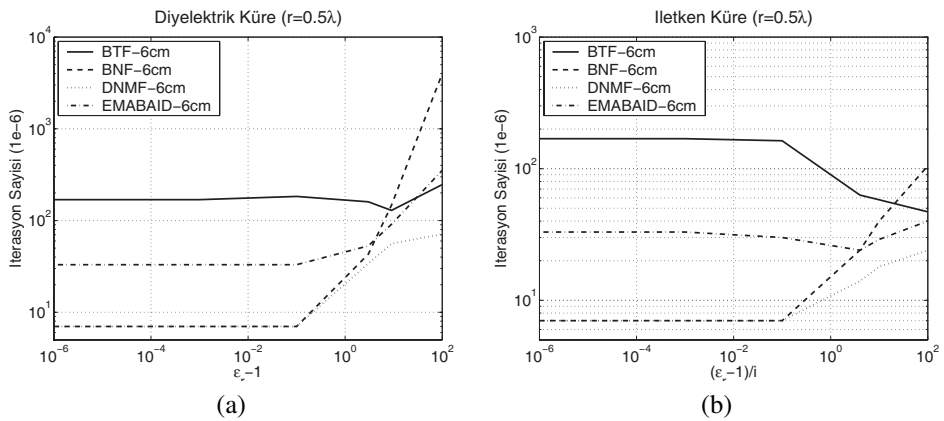
- [1] P. Ylä-Oijala, M. Taskinen ve S. Järvenpää, "Surface integral equation formulations for solving electromagnetic scattering problems with iterative methods," *Radio Science*, cilt 40, Kasım 2005.
- [2] P. Ylä-Oijala ve M. Taskinen, "Well-conditioned muller formulation for electromagnetic scattering by dielectric objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt 53, no. 10, s. 3316–3323, Ekim 2005.
- [3] Ö. Ergül ve L. Gürel, "RWG fonksiyonlarının manyetik alan integral denkleminde kullanılmasıyla ilgili sorunlar," *URSI-Türkiye 2004 Bilimsel Kongresi*, Ankara, Türkiye, s. 74–76, 2004.
- [4] Ö. Ergül ve L. Gürel, "Comparisons of FMM implementations employing different formulations and iterative solvers," *IEEE Antennas and Propagation Soc. Int. Symp.*, cilt 3, s. 19–22, 2003.



Şekil 1. (a) Yarıçapı 0.5λ ve dielektrik sabiti $\epsilon_r = 4$ olan kürenin E-düzlemindeki RKA değerleri. (b) Mie serisine göre RKA değerlerindeki hata.



Şekil 2. (a) Yarıçapı 0.5λ ve dielektrik sabiti $\epsilon_r = 1 + 4i$ olan iletken kürenin E-düzlemindeki RKA değerleri. (b) Mie serisine göre RKA değerlerindeki hata.



Şekil 3. Küre problemlerinin çözümü için gerekli iterasyon sayıları. (a) Farklı elektrik sabitleri ve (b) farklı iletkenlikler için.