

# RWG Fonksiyonlarının Manyetik Alan İntegral Denkleminde Kullanılmasıyla İlgili Sorunlar

Özgür Ergül ve Levent Gürel<sup>1</sup>  
Bilkent Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Bilkent, Ankara  
lgurel@ee.bilkent.edu.tr

**Özet:** Üç boyutlu karmaşık geometrilerle ilgili saçılım problemlerinin elektromanyetik benzetim ortamında yapılan çözümlerinde, elektrik alan integral denklemi (EAİD) için sıkça kullanılan Rao-Wilton-Glisson (RWG) fonksiyonları manyetik alan integral denklemi (MAİD) ve birleşik alan integral denklemi (BAİD) için de kullanılmaktadır. Öte yandan, köşeli ve sivri geometrilerle ilgili MAİD ve dolayısıyla BAİD çözümlerinin EAİD'ye göre yanlış olduğu, ölçüm sonuçlarıyla yapılan karşılaştırmalarla ve yakınsama analizleriyle gösterilmiştir. MAİD'deki doğruluk sorunu, bu denklemin EAİD'ye göre farklılıkları göz önüne alınarak incelenmiştir. Literatürde tam olarak anlaşılamadığı görülen olası sorunlar sistematik bir yaklaşımla elenmiş ve RWG fonksiyonlarının MAİD için EAİD'deki kadar uygun olmadığı gösterilmiştir.

## 1. Giriş

Üç boyutlu karmaşık geometrilerle ilgili saçılım problemlerinin elektromanyetik benzetim ortamında yapılan çözümlerinde, bilinmeyen sayısının artmasıyla birlikte EAİD yerine MAİD ve BAİD'in kullanılması zorunlu hale gelmektedir. Bu bakımdan, EAİD'de sıkça kullanılan RWG fonksiyonlarının [1] MAİD ve BAİD için de kullanılması gündeme gelmiş, sivri olmayan, yumuşak geometriler için doğruluğu yüksek olan akım ve radar kesit alanı sonuçları elde edilmiştir. Öte yandan, köşeli ve sivri geometriler için aynı derecede yüksek doğruluk elde edilememiş, bu geometrilerle ilgili MAİD ve dolayısıyla BAİD çözümlerinin EAİD'ye göre yanlış olduğu tespit edilmiştir. Bu durum, MAİD'in EAİD'den farklı olan ve literatürde tam olarak anlaşılamadığı görülen olası sorunlarının sistematik bir yaklaşımla ele alınmasıyla incelenmiştir. Bunlardan en önemlileri MAİD'de bulunan alan tekilliği ve geometrinin katı-açısına (solid angle) bağlı unsurlarıdır.

## 2. MAİD'deki Doğruluk Sorunu

Kapalı ve iletken geometrileri içeren saçılım problemleri için MAİD

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S'} d\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

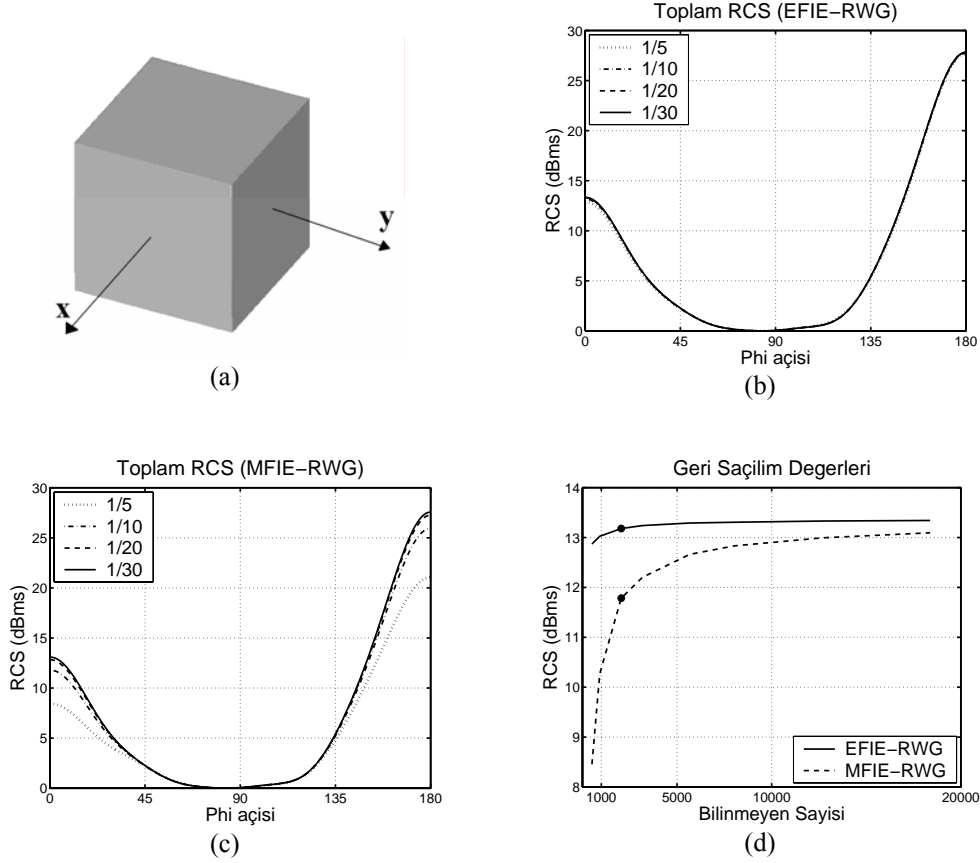
şeklinde yazılabilir. Denkleminde gözlem noktası ( $\mathbf{r}$ ) kapalı yüzeye ( $S'$ ) dışarıdan yaklaşmaktadır. Bu denklemin momentler metodunun (MOM: method of moments) uygulanmasıyla elde edilen empedans matrisinin elemanları

$$Z_{mn} = \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) - \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} d\mathbf{r}' \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2)$$

olarak yazılabilir ve bu ifade  $\mathbf{t}_m$  test fonksiyonu ile  $\mathbf{b}_n$  temel fonksiyonu arasındaki etkileşime karşılık gelir. MAİD'deki doğruluk sorununun anlaşılabilmesi için Şekil 1'de küp geometrisinin kullanıldığı bir saçılım problemi sunulmuştur. Şekil 1(a)'da gösterildiği gibi, kübün bir kenarı  $1\lambda$ 'dır ve  $x$  yönünden gelen ve elektrik alanı polarizasyonu  $y$  yönünde olan düzlemsel dalga ile aydınlatılmaktadır. Hem EAİD hem de MAİD değişik boylarda yapılan üçgenlemelerle kullanılmış, RWG fonksiyonlarını ve Galerkin yöntemini kullanan hızlı çokkutup yöntemiyle (FMM: fast multipole method) problemler çözülmüştür. Problemlerin sonucu olarak  $x-y$

<sup>1</sup> Bu çalışma, Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), TÜBİTAK (103E008), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

düzlemi üzerindeki toplam radar kesit alanı (RCS: radar cross section) değerleri gösterilmiştir. Şekil 1(b)'de değişik üçgenleme boyları için ( $\lambda/5$ - $\lambda/30$ ) EAİD'nin ve Şekil 1(c)'de aynı üçgenlemeler için MAİD'nin kullanılmasıyla elde edilen radar kesit alanı değerleri verilmiştir. Şekil 1(d)'de ise her iki integral denkleminde elde edilen geri saçılım (backscatter) değerleri artan bilinmeyen sayısına, yani sıkılaştıran üçgenlemeye göre verilmiştir. Bu şekildeki eğrilerin üzerindeki noktalar  $\lambda/10$  üçgenlemeye karşılık gelmektedir.



**Şekil 1.** (a)  $\lambda$  uzunluğunda kenarlara sahip küre, (b) EAİD ile elde edilen RCS değerleri, (c) MAİD ile elde edilen RCS değerleri, (d) bilinmeyen sayısına göre geri saçılım değerleri.

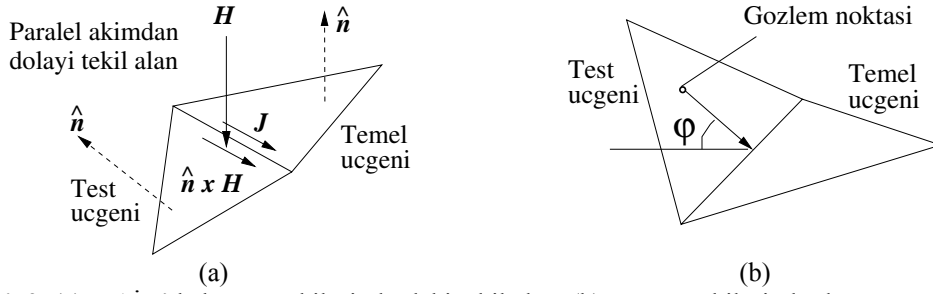
Şekil 1'de gösterilen sonuçlara bakıldığında MAİD'den elde edilen RCS değerlerinin EAİD'den elde edilenlere göre oldukça yavaş bir şekilde doğru değerlere yaklaştığı ve örneğin  $\lambda/10$  üçgenlemede bu değerlerin daha yanlış olduğu gözlemlenebilir. Bu durum diğer pek çok köşeli geometrilerin çözümünde de gözlemlenmiştir.

### 3. Doğruluk Sorununun İncelenmesi

MAİD'deki doğruluk sorunu bu denklemin EAİD'ye göre sahip olduğu farklılıkların ele alınmasıyla incelenmiştir:

a) *MAİD'de logaritmik alan tekilliği:* EAİD'den farklı olarak MAİD'de test fonksiyonları üzerinde alınan manyetik alan integrali tekil olabilmektedir. Komşu etkileşimlerde söz konusu olan bu durum, Şekil 2(a)'da gösterildiği gibi, temel fonksiyonunun kenarlarına yaklaştıkça buradaki paralel akımdan dolayı ortaya çıkmaktadır. Bu paralel akımın oluşturduğu dik manyetik alan logaritmik bir tekilliğe sahiptir ve test üçgeni ile temel üçgenin aynı düzlem üzerinde olmadığı durumlarda test edilmesi gerekmektedir. Bu işlem test üçgeninin içinde yeterince gözlem noktası olarak ve kenarlara yaklaşmaktan kaçınarak gerçekleştirilebilir. Böyle bir uygulamada, tekilliğin logaritmik olmasından dolayı, içeride alınan noktaların yeterli sayıda olması durumunda test integralinin doğru bir şekilde hesaplanabileceği düşünülmektedir. Öte yandan, bu integrallerin doğru bir şekilde yapıldığının gösterilmesi bakımından yeni bir yöntem olarak test integrallerindeki tekillik dışarı çıkartılmıştır. Bunun için test integrali iki parçaya ayrılmış ve tekil olan parça analitik olarak hesaplanmıştır. Bu yöntemle birlikte söz konusu integrallerin doğru bir şekilde hesaplanabilmesi için daha az test noktası alınması

gerektiği gözlemlenmiştir. Öte yandan, komşu integrallerin hassas doğruluk kriterleriyle hesaplanmasının MAİD'deki doğruluk sorununu çözmediği ve bu sorunun MAİD integrallerindeki hesaplama hatalarından kaynaklanmadığı da tespit edilmiştir.



**Şekil 2.** (a) MAİD'de komşu etkileşimlerdeki tekil alan. (b) Komşu etkileşimlerde test üçgeninden temel üçgeninin kenarına yaklaşan gözlem noktası.

b) MAİD'in katı-açıya bağlı bileşenleri: MAİD'deki dış integralin limit değeri açığa bağlı olup bu denklem

$$\frac{\Omega_0(\mathbf{r})}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \hat{n} \times \int_{S'(PV)} d\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{n} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

şeklinde de yazılabilmektedir. Bu yeni ifadede  $\Omega_0(\mathbf{r})$  yüzeyin gözlem noktasındaki dış katı-açısıdır. Eğer test integralinde tüm noktalar test üçgeninin içinde alınırsa o zaman bu denklemin düzlem yüzeyler üzerindeki haliyle ( $\Omega_0(\mathbf{r}) = 2\pi$ ) kullanılması gerekmektedir. Bu durum MAİD'in düzlemsel üçgenler için kullanıldığı durumlarda katı-açının doğru bir şekilde hesaba katılmadığı fikrine yol açmaktadır. Literatürde averaj bir katı-açısının tanımlandığı ve dışarıdan bu açının eklenmesiyle MAİD'deki problemin düzeltilebileceğini öneren çalışmalar vardır [2].

Öte yandan yaptığımız çalışmalarda MAİD'in daha dikkatli incelenmesiyle birlikte katı-açısının dışarıdan düzeltmeye gerek kalmadan doğru bir şekilde kullanıldığı anlaşılmıştır. Bunun için literatürde [3] verilen integral sonucunun limit değeri Şekil 2(b)'de gösterildiği durumlar için

$$\int_{S'} d\mathbf{r}' \frac{z}{R^3} = 2\phi \quad (4)$$

şeklinde düzeltilmiş, bu ifadenin kullanılmasıyla da MAİD'in katı-açısına bağlı bileşenleri bakımından zaten doğru bir şekilde kullanıldığı gösterilmiştir.

#### 4. Sonuç

MAİD'in RWG fonksiyonlarıyla kullanımıyla ilgili doğruluk sorunu bu denklemin EAİD'den farklılıkları gözününe alınmasıyla incelenmiş ancak bunların sorumlu olmadıkları gösterilmiştir. Sonuç olarak, RWG fonksiyonlarının MAİD için EAİD'deki kadar uygun olmadığı anlaşılmış ve bu denklem için RWG'den farklı lineer temel ve test fonksiyonlarının kullanımı gündeme gelmiştir [4].

#### Kaynaklar

- [1] S. M. Rao, D. R. Wilton, ve A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas Propagat., cilt AP-30, s. 409-418, Mayıs 1982.
- [2] J. M. Rius, E. Úbeda, ve J. Parrón, "On the testing of the magnetic field integral equation with RWG basis functions in method of moments," IEEE Trans. Antennas Propagat., cilt 49, no. 11, s. 1550-1553, Kasım 2001.
- [3] R. D. Graglia, "On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle," IEEE Trans. Antennas Propagat., cilt 41, no. 10, s. 1448-1454, Ekim 1993.
- [4] Ö. Ergül ve L. Gürel, "Manyetik alan integral denkleminde lineer temel fonksiyonların kullanımı," 2. URSl-Türkiye'2004 Bilimsel Kongresi, Ankara, Türkiye, Eylül 2004.