

İndüksiyon Teoremi ve Eşdeğerlik Teoremi ile İlişkisi

Ayhan Altıntaş

Bilkent Üniversitesi (e-mail: altintas@ee.bilkent.edu.tr)

Robert J. Paknys

Concordia Üniversitesi, Montreal, Kanada

1 Özet

İndüksiyon teoremi açık ve sade bir şekilde anlatılmıştır. İndüksiyon teoreminin, gelen dalganın orjinal kaynaklarını yüzey eşdeğer kaynaklarıyla değiştirmesi olduğu gösterilmiştir. Böylece, indüksiyon teoreminin, bazı kitaplarda anlatıldığı gibi eşdeğerlik teoremine alternatif olmayıp, bir uygulaması olduğu gösterilmiştir. Bazı örneklerle anlatım kolaylaştırılmıştır.

2 Giriş

İndüksiyon teoremi, Harrington [1] ve Balanis [2] gibi çok kullanılan ileri elektromanyetik kitaplarında, eşdeğerlik ilkesine bir alternatif olarak verilmektedir. Harrington'da [sayfa 113-114]"İndüksiyon teoremini eşdeğerlik teoremi ile karşılaştırmada eğitsel açıdan fayda vardır ...yukardaki (eşdeğer) teoreme karşıt olarak, indüksiyon teoremi bilinen akımlar verir" gibi ifadeler bulunmaktadır. Balanis ise iki kavram arasındaki yakın ilişkiyi indüksiyon eşdeğeri tanımı kullanarak ifade etmesine rağmen ayrı ayrı başlıklar altında alternatif kavramlar olarak işlemiştir. Schelkunoff'u özgün makalesinde de [3] indüksiyon ve eşdeğerlik teoremleri ayrı kavramlar olarak ortaya konulmaktadır. Burada bizim amacımız bu iki kavramın ayrı olmadığını, indüksiyon teoreminin eşdeğerlik teoreminin bir uygulaması olduğunu göstermektir. Burada eşdeğerlik, toplam alan yerine sadece gelen dalgaya uygulanmalıdır. Bu şekilde indüksiyon teoremini daha kolay ve anlaşılır bir şekilde ortaya koyduğumuzu düşünüyoruz. Konunun anlaşılmasına yardım etmek amacıyla iki örnek problem de sunuyoruz. Bunlardan birincisi, tam iletken bir düzlemsel plakadan saçınım, diğeri de tam iletken bir silindirden elektromanyetik saçınım problemleridir. Balanis'in kitabında [2] düzlemsel plakadan saçınım örneği anlatılmakla birlikte, sonuçlar sadece plakanın aydınlanmış bölgesinde geçerlidir. Karanlık tarafta bir eksi işareti kullanılması gerekmektedir.

3 İndüksiyon teoremi

İndüksiyon teoremini izah etmek için Love'u e şdeğerlik ilkesini[4] kullanacağız. Şekil 1'de görüldüğü gibi \mathbf{J}_o ve \mathbf{M}_o , \mathbf{E}_i ve \mathbf{H}_i alanlarını yaratan akımlar olsunlar. \mathbf{J}_o ve \mathbf{M}_o kaynaklarını içermeyen herhangi bir kapalı yüzey S alalım. Eşdeğerlik teoremi kullanarak S üzerinde

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_i \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{E}_i \times \mathbf{n}_i \quad (2)$$

şeklinde akımlar tanımlayabiliriz. Burada \mathbf{n}_i , S üzerindeki normal vektördür. Şekil 2'de gösterildiği gibi bu akımlar S 'in içinde (Bölge 1) \mathbf{E}_i ve \mathbf{H}_i , dışında (Bölge 2) ise sıfır alan verirler. S 'in dışındaki bir cisimden saçınım problemini çözmek için \mathbf{J}_o ve \mathbf{M}_o yerine \mathbf{J}_i ve \mathbf{M}_i kullanmak tamamıyla aynı sonucu verir. İndüksiyon teoreminde de bu yapılmaktadır. İndüksiyon teoremi uygulamalarında S saçındırıcı cismin hemen yüzeyine yapışık olarak alınmaktadır. Normal vektörün yönü de saçındırıcıdan dışarı doğru alındığında bizim normalimizin eksi işaretlisi olarak kullanılmaktadır. Şekil 3'te görüldüğü gibi ikinci bölge olarak adlandırılan bölgede gelen dalga sıfır olduğu için sadece saçınan alan ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) bulunmaktadır. Birinci bölgede ise hem gelen hem de saçınan alandan oluşan toplam alan ($\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$) bulunmaktadır.

Yukarda anlatıldığı gibi \mathbf{J}_i ve \mathbf{M}_i eşdeğer akımları saçındırıcı cismin yokluğunda sadece gelen dalgaya eşdeğer olduklarından yüzeyin her tarafında tanımlıdır. Balanis'te " Sadece aydınlanan bölgede daha kuvvetlidir." ifadesi de bu nedenle yanlış olmaktadır. Aşağıda düzlem plaka örneğinde gösterileceği gibi plakanın karanlık bölgesinde de aydınlık taraftakine eşit miktarda bir akım bulunmaktadır.

Çoğunlukla eşdeğerlik teoremi toplam alanlar için uygulanmaktadır. İndüksiyon teoreminde eşdeğerlik ilkesi gelen dalgaya uygulandığından ayrı bir kavram gibi düşünülmektedir, oysa ki değildir. İndüksiyon teoreminin kısa bir anlatımı şöyle verilebilir: 1 ve 2 denkleminde hesap edilen akımlar saçındırıcı cismin yokluğunda bulunmakta, ve saçındırıcı konulduğunda dışarda saçınan alanı vermektedir.

4 Örnekler

Bir örnek olarak tam iletken bir silindirden saçınım problemine bakalım. Silindir z eksenini boyunca uzansın ve yarıçapı a olsun. Gelen dalga ise TM_z durumunda E_o , TE_z durumunda ise H_o olarak adlandırılınsın ve x yönünde ilerlesin. Bu problemde saçınan alan kitaplarda [2] şöyle verilmektedir:

$$E_z^s = -E_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{-n} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta \rho) e^{jn\phi} \quad TM_z - \text{durumu}, \quad (3)$$

ve

$$H_z^s = -H_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{-n} \frac{J_n'(\beta a)}{H_n^{(2)'}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta \rho) e^{jn\phi} \quad TE_z - \text{durumu}. \quad (4)$$

Burada ρ ve ϕ silindirik koordinatları, β dalgasayısını, J_n ve $H_n^{(2)}$ de Bessel fonksiyonlarını göstermektedir. ($e^{j\omega t}$ zaman değişimi kabul edilmiştir.) Apostrof işareti ile türev anlatılmak istenmiştir.

Eğer bu problemi indüksiyon teoremi uygulayarak çözmek istersek, Şekil 4'teki gibi eşdeğer akımları silindir üzerine koyup, silindirin varlığında bu akımlardan oluşan alanı bulmamız gerekmektedir. Eşdeğer akımlar şöyle yazılabilir:

$$\mathbf{M}_i = \begin{cases} \mathbf{a}_\phi M_i^e = -\mathbf{a}_\phi E_o e^{-j\beta a \cos \phi'}, & TM_z - \text{durumu} \\ \mathbf{a}_z M_i^h = \mathbf{a}_z H_o \eta \cos \phi' e^{-j\beta a \cos \phi'}, & TE_z - \text{durumu} \end{cases} \quad (5)$$

Burada, ϕ' azimut açısını ve η da serbest uzay empedansını göstermektedir. Bu akımların silindirin varlığında oluşturacağı alan Green's fonksiyonunu yardımıyla şöyle yazılabilir:

$$E_z^s = \frac{1}{2\pi a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(\beta \rho)}{H_n^{(2)}(\beta a)} \int_0^{2\pi} M_i^e e^{jn(\phi-\phi')} a d\phi' \quad TM_z - \text{durumu} \quad (6)$$

ve

$$H_z^s = \frac{j}{2\pi a \eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(\beta \rho)}{H_n^{(2)'}(\beta a)} \int_0^{2\pi} M_i^h e^{jn(\phi-\phi')} a d\phi' \quad TE_z - \text{durumu} \quad (7)$$

Yukardaki akımları yerine koyarsak ve aşağıdaki Bessel fonksiyon bağıntılarını kullanırsak

$$J_n(\beta a) = \frac{(j)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\beta a \cos \phi' - jn\phi'} d\phi' \quad (8)$$

$$J_n'(\beta a) = -j \frac{(j)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi' e^{-j\beta a \cos \phi' - jn\phi'} d\phi' \quad (9)$$

eşitlik 3 ve 4'teki sonuçları buluruz. Bu örnek, orijinal kaynaklar yerine kullanılan eşdeğer akımların aynı saçınan alanı verdiğini göstermektedir.

İkinci örnek olarak tam iletken bir kare plakadan saçınımı gözönüne alalım. Şekil 5'te görüldüğü gibi eşdeğer akımlar plakanın her iki yanında da bulunmaktadır. Plakayı çok ince bir tabaka ile kapladığımızı düşünelim ve eşdeğer akımları bu yüzeye koyalım. Plakanın her iki yanında normal vektörler birbirine dik olduğundan akımlarda da eksi işareti farkı oluşacaktır. Bu işaret farkını daha iyi göstermek için sağ ve sol akımlar olarak adlandırılmışlardır. Elektrik akımları plaka üzerinde radyasyon yapmayacaklardır. Sadece manyetik akımların radyasyonunu düşünmemiz gerekir. Eğer plaka sonsuz olsaydı, imaj teoremi kullanılıp kolayca sonuç bulunurdu. Böylece eğer sol taraftaki bölge için alan bulunmak isteniyorsa sol taraftaki manyetik akımların imajları alınıp, serbest uzaydaki radyasyonları bulunacaktı, sağ taraftaki bölge için de sağ taraftaki manyetik akımlardan radyasyon bulunacaktı. Harrington'un kitabında bu ters yöndeki akımlar açıkça gösterilmiştir, ancak Balanis'te atlanmıştır.

5 Sonuç

İndüksiyon teoreminin eşdeğer teoreminin bir uygulaması olduğu gösterildi. Saçınım probleminde orijinal kaynaklar yerine eşdeğer kaynaklardan oluşan saçınım bulunmaktadır. Konunun iyi anlaşılması için iki örnek gösterilmiş ve kitaplarda yapılan yanlışlar açıklanmıştır.

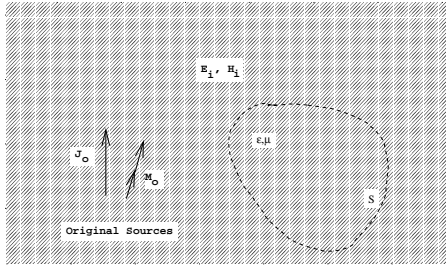


Figure 1: $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ gelen dalgaların yayan orijinal kaynaklar $\mathbf{J}_o, \mathbf{M}_o$.

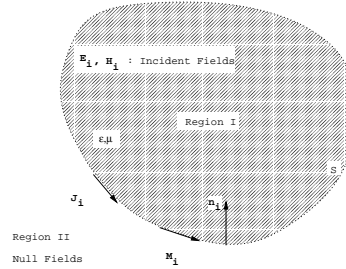


Figure 2: \mathbf{S} içinde gelen alanları yaratan $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$ Yüzey eşdeğer akımları.

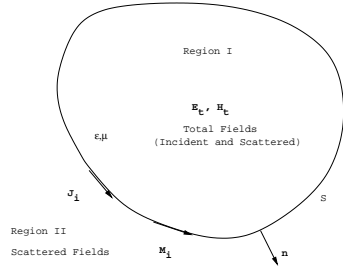


Figure 3: $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$ eşdeğer akımları saçındırıcı varken yayın yapmaktadır.

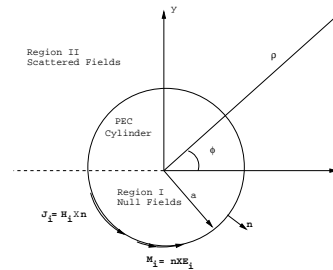


Figure 4: Tam iletken bir silindir için eşdeğer akımlar.

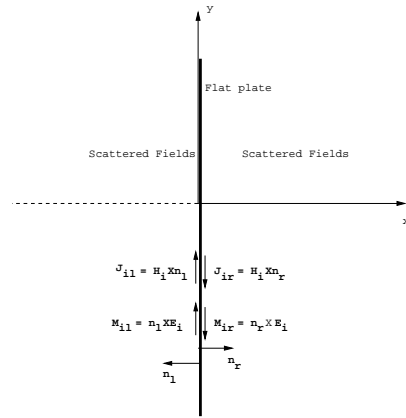


Figure 5: Düzlem plaka için eşdeğer akımlar.

6 Kaynaklar

- R.G. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, New York: McGraw-Hill, 1961.
- C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, New York: Wiley, 1989.
- S.A. Schelkunoff, "Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems", *Bell System Technical Journal*, vol.15, January 1936.
- S.R. Rengarajan and Y. Rahmat-Samii, "The field equivalence principle: Illustration of the establishment of the non-intuitive null fields," *IEEE Antennas and Propagation Magazine* Vol. 42, No. 4, August 2000.