Tamamen Eşlenmiş Katmanlarda
Nedensellik ve Karşılıklılık İlkelerinin İncelenmesi

Mustafa Kuzuoğlu
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
O6531, Ankara
kuzuoglu@metu.edu.tr

Özet: *Elektromanyetik sınır değer problemlerinin sayısal modellerinde sonsuza uzanan uzay bölgesinin sonlandırılması için kullanılan yaklaşımlardan biri tamamen eşlenmiş katmanlardır. Tamamen eşlenmiş katmanlar, elektromanyetik dalgayı frekansından ve geliş yönünden bağımsız olarak hiç yansıtma olmaksızın emerek dış uzaya doğru olan ışımayı simüle ederler. Anizotropik ve/veya bianizotropik materyal parametreleriyle tamamen eşlenmiş katmanların modellenmesi mümkündür. Bu gösterime eşdeğer olarak, karmaşık koordinat dönüşümleri yardımıyla tamamen eşlenmiş katmanlar oluşturulabilir. Bu çalışmada, materyal ortam olarak tanımlanan tamamen eşlenmiş katmanlarda nedensellik ve karşılıklılık ilkelerinin sağlanabilmesi için gerekli olan koşullar tartışılmaktadır*

1. Giriş

Zamana bağımlı veya zamana gore harmonik elektromanyetik ışıma ve saçılma problemleri, kısmi türevsel denklemler ve uygun seçilmiş başlangıç ve/veya sınır değerleri kullanılarak modellenirler. Cisim geometrisinin karmaşıklığı veya materyal özellik parametrelerinin uzay koordinatlarına bağımlılığı durumunda, bu problemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi genellikle olanaksızdır. Bu zorluğu aşabilmek için çok sayıda sayısal tabanlı yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Kısmi türevsel denklemlerle modellenen problemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesi için kullanılan yaklasımlardan en önemlileri, sonlu elemanlar yöntemi ve zamana bağımlı sonlu farklar yöntemidir. Her iki yöntemde de uzay bölgesinin küçük alt-bölgelere ayrıştırılması ve bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık ifadelerinin, sonlu sayıda bilinmeyen içerecek şekilde elde edilmesi gerekmektedir. Elektromanyetik saçılma ve ışıma problemlerinde uzay bölgesi genel olarak sınırsızdır ve sayısal modellerde sınırsız bölgenin yapay olarak sınırlandırılması bir zorunluluktur. Bu işlemi gerçekleştirebilmek için kullanılan başlıca iki yaklaşım bulunmaktadır. Birinci yaklaşımda, uzay bölgesini yapay olarak sonlandıran yüzey üzerinde elektromanyetik dalgayı yaklaşık olarak yokeden emici sınır koşulları tanımlanır [1]. Emici sınır koşulları, ışıyan veya saçılan dalganın asimtotik davranışından türetildiği için, sınırın saçıcı cisim veya antenden yeterince uzakta tanımlanmasını gerektirir. Bunun sonucunda oldukça büyük bir çözüm bölgesinin kullanılması söz konusu olmaktadır. Buna bağlı olarak bilinmeyen sayısı artmakta ve sayısal çözüm yaklaşımlarında işlemci hızı ve bellek kapasitesi açısından sorunlar yaşanmaktadır. Emici sınır koşullarına alternatif olarak Berenger tarafından geliştirilen tamamen eşlenmiş katmanlar yaklaşımında, uzay bölgesi gelen elektromanyetik dalgayı frekansından ve geliş yönünden bağımsız olarak yansıtma olmaksızın emen materyal bir ortamla sonlandırılmaktadır [2]. Berenger'in geliştirdiği tamamen eşlenmiş katmanlarda, elektrik ve manyetik alanlar çeşitli bileşenlere ayrılmıştır ve elektromanyetik alanlar Maxwell denklemlerini sağlamamaktadır. Bu nedenle, Berenger'in çalışmasının ardından Maxwell denklemlerinin sağlandığı ve anizotropik ortamlar şeklinde modellenen tamamen eşlenmiş katmanlar ortaya atılmıştır [3,4]. Bu ortamlarda $\overline{\overline{\varepsilon}}$ ve $\overline{\overline{\mu}}$ tensörleri, tamamen eşlenmiş katmanın özelliklerini gerçekleştirecek şekilde seçilirler. Tamamen eşlenmiş katmanların uygulamalarının ilk aşamalarında nedensellik ve karşılıklılık ilkeleri göz önüne alınmamıştır. Bu nedenle, düşük frekans uygulamalarında bazı zorluklarla karşılaşılmıştır [5] ve yanlışlıkla karşılıklılık ilkesini sağlamayan materyal ortamlar ortaya atılmıştır [6]. Bu çalışmada, nedensellik ilkesi gereğince materyal parametreleri Kramers-Kronig bağıntılarını sağlayan ve değişik gerçekleştirmeler çerçevesinde karşılıklılık ilkesini gerçekleyen tamamen eşlenmiş katmanlar kuramı geliştirilecektir.

2. Tamamen Eşlenmiş Katmanların Materyal Ortamlarla Gerçekleştirilmesi

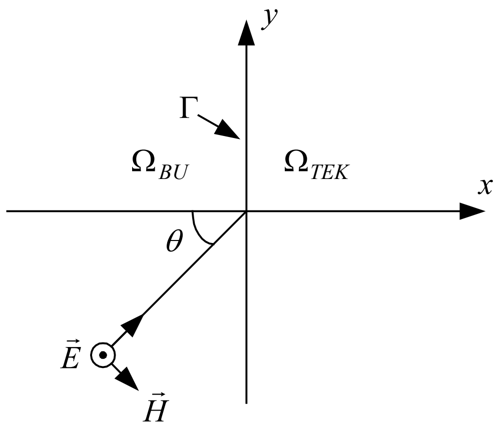
Tamamen eşlenmiş katmanların material ortamlarla nasıl gerçekleştirildiğini görebilmek amacıyla bir TM_z model problemi incelenecektir. Boş uzay bölgesi Ω_{BU} ve tamamen eşlenmiş katman bölgesi Ω_{TEK} aşağıdaki ifadelerle tanımlansın:

$$\Omega_{BU} = \{(x, y) \mid x < 0\} \tag{1}$$

$$\Omega_{TEK} = \{(x, y) \mid x > 0\} \tag{2}$$

Arayüz Γ Şekil 1. de gösterilmektedir. Ω_{BU} bölgesinde $E_z(x,y)$ ile ifade edilen bir düzlem dalga varsayılmaktadır (Bu çalışmada zamana gore değişim $\exp(j\omega t)$ olarak alınmıştır):

$$E_z(x,y) = \exp\left[-jk(\cos\theta\, x + \sin\theta\, y)\right] \tag{3}$$



Şekil 1.

Tamamen eşlenmiş katman hipotezine göre bu düzlem dalga Ω_{TEK} bölgesine yansımasız olarak geçebilmeli ve $+x$ yönünde sönümlenmelidir. Bu nedenle, Ω_{TEK} bölgesinde $E_z(x,y)$ için aşağıdaki ifade varsayılabilir:

$$E_z(x,y) = f(x)\exp\left[-jk(\cos\theta\, x + \sin\theta\, y)\right] \tag{4}$$

Bu ifadede $f(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

1. $f(0) = 1.$
2. $f(x)$ fonksiyonu $x > 0$ için monoton olarak azalmalıdır.

Örneğin, $\alpha > 0$ olarak seçilen bir sabit için $f(x) = \exp(-\alpha\cos\theta\, x)$ yukarıdaki koşulları sağlamaktadır. Bu fonksiyonun seçiminin karşılıklılık ilkesi üzerindeki etkileri 4. Bölümde anlatılacaktır. $f(x)$ fonksiyonu (4) numaralı denkleme yerleştirildiği zaman, $E_z(x,y)$ alan bileşeninin aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemi sağladığı görülebilir:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0 \tag{5}$$

Bu denklemde $a = 1 + \dfrac{\alpha}{jk}$ olarak tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklemi sağlayacak şekilde tamamen eşlenmiş katmanlar anizotropik ve bianizotropik ortamlar şeklinde gerçekleştirilebilirler.

Anizotropik tamamen eşlenmiş katmanlarda, alan bileşenleri $\vec{B} = \mu_0[\Lambda]\vec{H}$ ve $\vec{D} = \varepsilon_0[\Lambda]\vec{E}$ şeklinde ifade edilirler ve $[\Lambda]$ tensörü şu şekilde tanımlanır:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \tag{6}$$

Bianizotropik tamamen eşlenmiş katmanlarda ise $\vec{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{E} + \overline{\overline{\xi}}\,\vec{H}$ ve $\vec{B} = \overline{\overline{\zeta}}\,\vec{E} + \overline{\overline{\mu}}\,\vec{H}$ alan ifadelerinden yola çıkarak ve (5) numaralı denklemi kullanarak $\overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \overline{\overline{I}}$ ve $\overline{\overline{\mu}} = \mu_0 \overline{\overline{I}}$ olarak seçilebilir. $\overline{\overline{\xi}}$ ve $\overline{\overline{\zeta}}$ tensörlerinde ise $\xi_{zy} = \zeta_{yz} = -(\alpha / ck^2)(1/a)(\partial / \partial x)$ elemanları dışında kalanlar sıfırdır.

3. Tamamen Eşlenmiş Katmanlarda Nedensellik İlkesi

Anizotropik tamamen eşlenmiş katmanlarda $\overline{\overline{\varepsilon}}$ ve $\overline{\overline{\mu}}$ tensörleri Kramers-Kronig bağıntılarını sağlamamaktadır. Bu nedenle a parametresi şu şekilde değiştirilmelidir:

$$a = 1 + \frac{\beta}{1 + j\alpha\omega} \tag{7}$$

Bu tanım kullanılarak, tamamen eşlenmiş katmanın düşük ve yüksek frekans davranışı kestirilebilir. Düşük frekanslarda ($\alpha\omega << 1$) $a \cong 1 + \beta$ ve yüksek frekanslarda ($\alpha\omega >> 1$) $a \cong 1 - j\dfrac{\beta}{\alpha\omega}$ asimtotik ifadeleri elde edilir. Tamamen eşlenmiş katmanların ilk uygulamalarında yüksek frekans ifadesi esas alınmıştır ve doğal olarak bu şekilde tanımlanan tamamen eşlenmiş katmanlar, düşük frekans uygulamalarında başarılı olamamıştır. (7) numaralı ifadenin temel alındığı durumlarda sonuçların daha başarılı olduğu literatürde bildirilmiştir [7].

4. Tamamen Eşlenmiş Katmanlarda Karşılıklılık İlkesi

Genel bir bianizotropik ortamda, karşılıklılık ilkesinin gerçeklenmesi için ortam parametreleri aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}^T \quad \overline{\overline{\mu}} = \overline{\overline{\mu}}^T \quad \overline{\overline{\xi}} = -\overline{\overline{\zeta}}^T \tag{8}$$

(4) numaralı denklemdeki $f(x)$ fonksiyonunun yukarıda tanımlanan şekilde seçilmesi sonucunda, anizotropik ve bianizotropik tamamen eşlenmiş katmanların karşılıklılık ilkesini sağladığı gösterilebilir. Bianizotropik ortamların tensör parametrelerinde uzay türev operatörlerinin varlığı nedeniyle matrisler operator olarak yorumlanmalıdır. $f(x)$ fonksiyonunun keyfi olarak tanımlanması sonucunda karşılıklılık ilkesini sağlamayan tamamen uyumlu katmanlar literatürde mevcuttur [6].

5. Sonuç

Bu çalışmada, nedensellik ilkesi gereğince materyal parametreleri Kramers-Kronig bağıntılarını sağlayan ve anizotropik ve bianizotropik gerçekleştirmeler çerçevesinde karşılıklılık ilkesini gerçekleyen tamamen eşlenmiş katmanlar kuramı geliştirilmiştir.

Kaynaklar

[1] Bayliss A., Gunzburger M., ve Turkel E., "Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior domains", SIAM J. Appl. Math., 42 s. 430-451, 1982.
[2] Berenger J. P., "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", J. Computational Physics, 114, s. 185-200, 1994.
[3] Sacks Z. S., Kingsland D. M., Lee R., ve Lee J. F., "A perfectly matched anisotropic absorver for use as an absorbing boundary condition", IEEE Trans. Antennas Propagat., 43, s. 1460-1463, 1995.
[4] Kuzuoglu M., ve Mittra R., "Investigation of non-planar perfectly matched absorbers for finite element mesh truncation", IEEE Trans. Antennas Propagat., 45, s. 474-486, 1997.
[5] DeMoerloose J., ve Stuchly A. M., "Reflection analysis of PML ABCs for low frequency applications", IEEE Microwave and Guided wave letters, 6, s. 177-179, 1996.
[6] Peng J., ve Balanis C. A., "A generalized reflection-free domain truncation method: Transparent absorbing boundary", IEEE Trans. Antennas Propagat., 46, s. 1015-1022, 1998.
[7] Berenger J. P., "Numerical reflection from FDTD-PMLs: A comparison of the split PML with the unsplit and CFSPMLs", IEEE Trans. Antennas Propagat., 50, s. 258-265, 2002.

Mustafa Kuzuoğlu received the B.Sc., M.Sc., and Ph.D. degrees from Middle East Technical University, in 1979, 1981 and 1986, respectively. Presently, he is a professor at the Department of Electrical and Electronics Engineering of METU.

He has held visiting positions at Darmstadt Technical University (1988), Eastern Mediterenean University (1994-1995), University of Illinois at Urbana-Champaign (1995-1996), and Pennsylvania State University (1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2003). His research interests include the numerical solution of problems of electromagnetics (in particular, the finite element method and perfectly matched layers), antennas and microwaves.

Mustafa Kuzuoğlu Lisans, Yüksek Lisans ve Doktora derecelerini, sırasıyla 1979, 1981 ve 1986 yıllarında Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nden almıştır. Şu anda, ODTÜ Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde profesör olarak görev yapmaktadır.

Darmstadt Teknik Üniversitesi'nde (1988), Doğu Akdeniz Üniversitesi'nde (1994-1995), University of Illinois at Urbana-Champaign'de (1995-1996) ve Pennsylvania State University'de (1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2003) konuk araştırmacı veya öğretim üyesi olarak bulunmuştur. İlgi alanları, elektromanyetik problemlerinin sayısal çözümleri (özellikle sonlu elemanlar yöntemi ve mükemmel eşlenmiş katmanlar kuramı), antenler ve mikrodalga uygulamalarıdır.