

Lineer Üçgen Elemanları İçeren Sonlu Eleman Ağıının Dörtgen Elemanlar Kullanılarak İnceltilmesi

Ali İhsan ÇANAKOĞLU
Dumlupınar Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kütahya
acanakoglu@dumlupinar.edu.tr

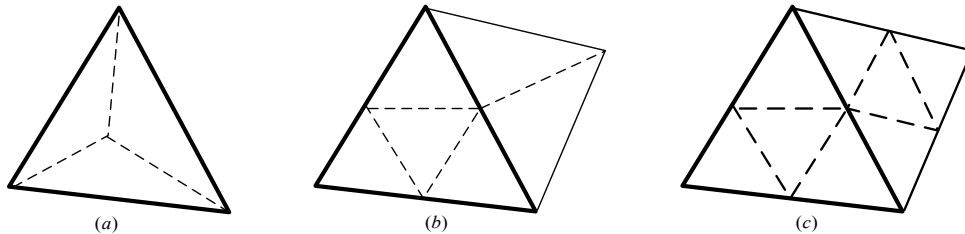
Özet: Bu bildiride, sonlu elemanlar ağıında lineer üçgen elemanlar kullanılması durumunda, bu elemanların dörtgen elemanlar kullanılarak inceltmesi üzerine yeni bir ağ inceltme yöntemi verilmiştir. Yazılan kişisel sonlu eleman programlarında kolayca kullanılabilecek yöntem, her üçgen elemanı kendi içersinde bir üçgen ve üç adet dörtgen elemana ayırmaktadır. Ağdaki diğer elemanların inceltme işleminden etkilenmemesi, yöntemin avantajıdır. Yöntem basit bir magnetostatik probleme uygulanarak sonuçlar tartışılmıştır.

1. Giriş

Sonlu elemanlar yönteminde elde edilecek sonuçların yaklaşım doğruluğu, ağ içersinde kullanılan eleman tipine ve eleman sayısına bağlıdır. Lineer üçgen elemanlar kullanılması durumunda örneğin, magnetostatik problemlerde magnetik akı yoğunluğu, eleman yüzeyi üzerinde sabit kabul edilir. Bu durumda eleman yüzey alanları ne kadar küçük olursa bu kabul o kadar doğru olur. Yazılan kişisel programlarda ağ yapısına ait değerler; düğüm koordinatları, eleman yerleşimleri (eleman bağlantı matrisi) ve eleman tipi (elemanın hangi malzemeyi modellediği) tek tek el ile girilmelidir. Başlangıçta yapılan ağ için veri girişinin zaman almaması bakımından eleman sayısı genelde az tutulur. Girilen bu ilk ağ, daha sonra inceltme işlemine, yani elemanların tekrar kendi içersinde bölünmesi işlemine tabi tutularak eleman sayısının artırılmasına çalışılır. Ağ inceltme işlemi için bir çok algoritmalar geliştirilmiştir [1]-[2]. Bu çalışmalarda temel yöntem Delaunay yöntemidir. Delaunay yöntemi kişisel olarak yazılan programlarda uygulanması oldukça zor, karmaşık bir algoritmaya sahiptir. Delaunay algoritması bugünkü paket programlarda kullanılmaktadır ve inceltme işlemi için kabul görmüş bir algoritmadır. Kişisel programlarda kullanılabilecek basit inceltme yöntemleri de geliştirilmiştir. Basit inceltme yöntemlerinde dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, inceltme işlemi sonucunda elde edilecek yeni elemanların kalitelerinin iyi olmasını sağlamaktır. Kalite ölçümünde en önemli kriter açılarıdır. Lineer üçgen elemanlar için kabul edilebilir minimum açı aralığı 30-60 derece, maksimum açı aralığı ise 60-90 derecedir. Bu aralıkların dışında iç açıya sahip bir üçgenin kalitesinin kötü olduğu sonucu ortaya çıkar. Eşkenar üçgen bu durumda en kaliteli eleman olmaktadır. Dörtgen elemanlar için de benzer kriterler mevcuttur ve ileride değinilecektir. Sonuç olarak inceltme işleminde elemanların kalitelerinin de iyi olmasına dikkat edilmelidir.

2. Lineer Üçgen Elemanlarla Ağ İnceltme Yöntemleri

Kişisel programlarda kullanılabilecek üç türlü basit inceltme yöntemi mevcuttur. Birincisinde, istenilen üçgen elemanın iç bölgesine bir düğüm ilave edilerek, mevcut üçgen üç adet üçgene bölünerek eleman sayısı artırılır ve üçgen elemanların alanı küçültülür. Şekil 1(a)'da bu bölmelemeye örnek görülmektedir.



Şekil 1. Lineer üçgenin alt üçgenlere bölünmesi.

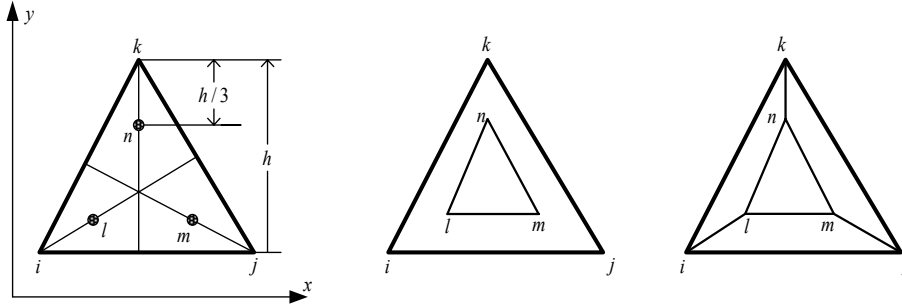
Şekil 1(a)'dan görüldüğü gibi, eleman içinde elde edilen üçgenlerin orta noktadaki açıları 90 dereceden büyüktür. Bu durum da içerde elde edilen üçgenlerin kaliteleri düşük olmaktadır.

İkinci basit inceltme yöntemi ise, üçgenin kenarlarının orta noktalarını köşe noktası kabul eden bir üçgenin içeriye yerleştirilmesi yöntemidir. Böylece üçgen dört adet alt üçgene bölünmektedir. Şekil 1(b)'de bu bölmeleme işlemi görülmektedir. Ancak bölünen üçgene komşu bir üçgen varsa bunun da iki elemana bölünmesi gerekecektir çünkü, komşu üçgenle ortak kullanılan kenar ortasında paylaşılmayan bir düğüm noktası ortaya çıkmaktadır. Bu işlemin bölünen üçgene komşu bütün elemanlara uygulanması gerekecektir. Komşu üçgen içinde elde edilen üçgenlerin açılarında 90 derecelik ya da daha büyük açılar elde edilmesi söz konusu olduğundan, burada da üçgenlerin kalitesinin bozulduğu görülmektedir.

Üçüncü inceltme yönteminde ise, ikinci yöntemle benzer olarak üçgen eleman dört adet alt üçgene bölündükten sonra benzer şekilde komşu üçgenler de dört alt üçgene bölünmektedir. Bu şekilde bölmeleme, ağdaki bütün elemanları etkileyeceğinden, bölmeleme her elemana uygulanır ve ağdaki eleman sayısı başlangıçtaki dört katına çıkar. Elde edilen her eleman uygun biçimde yeniden numaralandırılmalıdır ve sınıra gelen ilave düğümlere ilgili sınır şartları atanmalıdır. Şekil 3(b)'de bu bölmeleme işlemine ait bir örnek görülmektedir. Bu yöntemin dezavantajı eleman sayısının ilk inceltme sonucunda dört katına çıkması sebebiyle problem çözüm süresinin artması ve adaptif inceltme işlemine izin vermemesidir.

3. Dörtgen Elemanlar Kullanarak Üçgen Elemanların İnceltilmesi

Ağ inceltme işleminde, sadece istenen elemanların alt elemanlara bölünmesi, diğerlerinin bu işlemle etkilenmemesi için aşağıda tanımlanacak olan yöntem kullanılmıştır. Burada amaç, elemanlar arası sürekliliği bozmamak ve problem sınırlarına yeni düğümler ilave etmemektir. Bunun için yeni düğümleri, eleman sınırı üzerinde değil eleman içerisinde seçmek gereklidir. Yöntemi bir sistematığa bağlamak açısından, inceltilecek üçgenin köşe noktalarından, kenarortay üzerinde, kenarortayın 1/3'ü kadar uzunluğundaki mesafede, üç nokta tesbit edilmektedir. Şekil 2'de gösterilen üçgenin genel düğümleri i, j ve k 'dir. Üçgen içerisinde seçilen noktalar ise l, m ve n 'dir. Yeni noktalar, ana üçgen içerisinde oluşturulacak yeni üçgenin köşe noktalarıdır.



Şekil 2. Lineer üçgen eleman içerisinde dörtgen elemanları oluşturma.

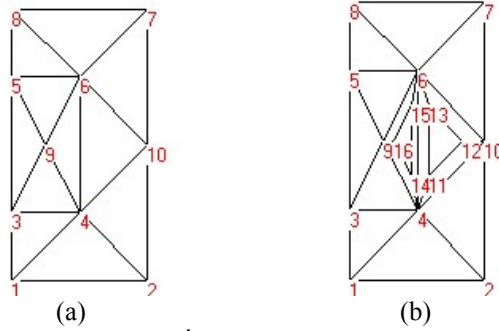
$i-l$, $j-m$, ve $k-n$ noktaları birleştirilerek ana üçgen içerisinde üç adet dörtgen eleman oluşturulur. Sonuçta ana üçgen eleman, bir üçgen, üç adet dörtgen elemana bölünmüş olacaktır. İnceltme işleminden komşu elemanlar etkilenmeyecektir. Komşu elemanlar istenilirse inceltme işlemine tabi tutulabilir. İçerideki üçgen eleman istenilirse aynı yöntemle tekrar alt elemanlara bölünebilir. Sınıra herhangi bir düğüm ilavesi söz konusu olmayacağından sınır şartlarında ayarlama gerekmeyecektir. İlave edilen düğüm noktalarının koordinatları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} x_l &= \frac{4x_i + x_j + x_k}{6} & y_l &= \frac{4y_i + y_j + y_k}{6} \\ x_m &= \frac{4x_j + x_i + x_k}{6} & y_m &= \frac{4y_j + y_i + y_k}{6} \\ x_n &= \frac{4x_k + x_i + x_j}{6} & y_n &= \frac{4y_k + y_i + y_j}{6} \end{aligned} \quad (1)$$

Elde edilen dörtgen elemanlar lineerdir. Dörtgen elemanlara ait katsayılar matrisleri, izoparametrik elemanlara uygulanan eleman katsayı matrisi hesaplama yöntemi ile hesaplanabilir [3].

4. Uygulama

Yöntem basit bir magnetostatik probleme uygulanmıştır. Şekil 3(a)'da problem için lineer üçgen elemanlardan oluşturulan başlangıç ağı görülmektedir. Problem basit bir elektromagnetin alan dağılımı ve sargı endüktansının hesabı için oluşturulmuştur. 1-3-5-8 numaralı düğümlerin bulunduğu sınır simetri sınırıdır ve Neumann sınır şartı geçerlidir. Diğer sınırlarda ise homojen Dirichlet sınır şartı bulunmaktadır. 3-4-5-6-9 numaralı düğümlerin modellediği elemanlar sargıyı, diğerleri ise nüveyi modellemektedir. Şekil 3(b)'de 4-6-9 ve 4-10-6 numaralı düğümlerin modellediği üçgenler verilen yöntem ile dörtgen elemanlar kullanılarak inceltilmiştir. İlave edilen düğümler 11-12-13 ve 14-15-16 numaralı düğümlerdir.



Şekil 3. (a) Başlangıç ağı. (b) İki elemanın dörtgen elemanlarla inceltilmesi.

Problem her iki ağ yapısı için çözülmüş ve düğümlerdeki magnetik vektör potansiyel değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

Şekil 3(a)'daki ağ yapısı		Şekil 3(b)'deki ağ yapısı	
Düğüm	MVP (Wb/m)	Düğüm	MVP (Wb/m)
3	0.0418914	3	0.0403611
4	0.0418872	4	0.0403569
5	0.0418914	5	0.0403611
6	0.0418872	6	0.0403569
9	0.0418910	9	0.0403606
		11	0.0337286
		12	0.0132565
		13	0.0337286
		14	0.0403576
		15	0.0403576
		16	0.0403596

5. Sonuçlar

Verilen yeni ağ inceltme yöntemi, yazılan kişisel programlara kolayca uygulanabilecek bir yöntemdir. Yöntemin avantajları şu şekilde özetlenebilir:

- 1- Bir elemana inceltme işlemi uygulandığında komşu elemanlar bundan etkilenmemektedir.
- 2- Sınırlara ilave düğüm gelmemesi sebebiyle sınır şartlarında ilave bir atama işlemine gerek yoktur.
- 3- Dörtgen elemanlarda iç açılarının sınırı 135 dereceye çıkabileceğinden, elde edilen dörtgen elemanların kalitesi iyidir.
- 4- Yöntem, elemanların bağımsız bölünmesine izin vermesi sebebiyle, adaptif ağ inceltme işlemine de uygundur.

Kaynaklar

- [1]. Bryant, C., F., "Two Dimesional Triangular Mesh Generation", IEEE Trans. On Mag. Vol. MAG-21, No:6, s.2547-2550, 1985.
- [2]. Shepard, M. S., "Automatic and Adaptive Mesh Generation", IEEE Trans. On Mag. Vol. MAG-21, No:6 s.2557-25661, 1985.
- [3]. Reddy, J. N., An Introduction to the Finite Element Method, Mc Graw Hill, s.315-327, 1984.