

Düzlemsel Elektromagnetik Dalgaların Empedans Yüklü Bir Paralel Plakalı Dalga Kılavuzundan Kırınımı: Matris Wiener-Hopf Yaklaşımı

Alinur Büyükkaksoy, Gökhan Çınar
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Gebze, Kocaeli

A. Hamit Serbest
Çukurova Üniversitesi
Elektronik Elektrik-Mühendisliği Bölümü
Balcalı, Adana

Özet: Bu çalışmada iki-parçalı bir empedans düzlem ile bir mükemmel iletken yarım-düzlemden oluşan empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzundan düzlemsel elektromagnetik dalgaların kırınımı incelenmiştir. Söz konusu sınır-değer probleminin Fourier integralleri ile formülasyonu matris Wiener-Hopf denklemi ile sonuçlanmıştır. Bu denklemin “zayıf faktörizasyon kavramına dayalı” yöntem ile çözümü yapılmış ve sonuç sonsuz bilinmeyenli bir cebirsel denklem sistemini sağlayan katsayılar cinsinden bulunmuştur.

1. Giriş

Bu çalışmada iki-parçalı bir empedans düzlem ile bir mükemmel iletken yarım-düzlemden oluşan empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzundan düzlemsel elektromagnetik dalgaların kırınımı problemi incelenmektedir. Söz konusu sınır-değer probleminin Fourier integralleri ile formülasyonu sonucu matris Wiener-Hopf denklemi elde edilmektedir. Bu denklemin çözümü, bir kare matrisi elemanları kompleks düzlemin kesişim bölgeleri olan yarım-düzlemlerinde regüler ve cebrik olan ve sıfırdan farklı determinantlara sahip bulunan iki matrisin çarpımı şeklinde ayrıştırmayı gerektirir. Matris çarpımı işleminin komütatif olmamasından dolayı herhangi bir kare matrisi Wiener-Hopf faktörizasyonu ile ayrıştırmak için genel bir yöntem yoktur. Ancak bugüne kadar bazı özelliklere sahip matrislerin faktörizasyonu için dikkate değer bir gelişme kaydedilmiştir. Bunların arasında Hurd [1], Rawlins [2] ve Rawlins & Williams’ın [3] önermiş olduğu Hilbert Yöntemi çekirdek matrisin tekilliğinin yalnızca dallanma noktalarından ibaret olduğu durumlarda oldukça güçlüdür. Daniele’nin 1978’de [4] Khrapkov’un ise 1981’de [5] birbirlerinden bağımsız olarak ortaya attıkları Daniele-Khrapkov Yöntemi ise yalnızca kutup tekilliği ya da onun yanında dallanma tekilliği olduğu durumlarda etkilidir. Son olarak İdemen’in 1979’da [6] Abrahams’ın ise 1987’de [7] öne sürdükleri “zayıf faktörizasyon kavramına dayalı” yöntem mevcuttur. Bu yöntemlerin örnekli olarak ayrıntılı analizi Büyükkaksoy ve Serbest tarafından 1993’te [8] yapılmıştır. Bu problemde karşılaşılan matris Wiener-Hopf denklemi “zayıf faktörizasyon kavramına dayalı” yöntem ile çözüldüğünde sonsuz bilinmeyenli bir cebirsel denklem sistemine varılmaktadır. Bu denklem sisteminin sayısal yöntemlerle çözülmesiyle birlikte kırınan alan elde edilmiş olmaktadır.

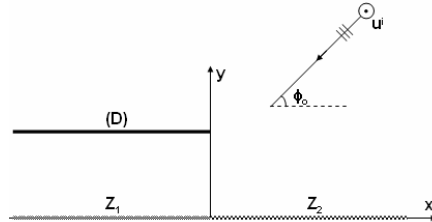
Çalışma boyunca elektromagnetik dalgaların zaman bağımlılığı $e^{-i\omega t}$ olarak kabul edilmiştir.

2. Matris Wiener-Hopf Formülasyonu

Şekil 1’de görülen sistemi

$$E_z^i = u^i = \exp[-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)] \quad (1)$$

ile gösterilen E-polarize düzlemsel dalga aydınlatmaktadır.



Şekil 1. Problemin geometrisi.

Toplam alan

$$u^r(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) + u^i(x, y) + u^r(x, y) & , \quad y > b \\ u_2(x, y) & , \quad 0 < y < b \end{cases} \quad (2)$$

$$u^r(x, y) = -\exp\{-ik[x \cos \phi_o - (y - 2b) \sin \phi_o]\} \quad (3)$$

şeklinde ifade edildiğinde,

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (4)$$

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L A(\alpha) e^{iK(y-b) - i\alpha x} d\alpha \quad (5)$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L [B(\alpha) \cos Ky + C(\alpha) \sin Ky] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (6)$$

$$\Phi_1^+(\alpha) = \int_0^\infty u_1(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (7)$$

$$\Phi_2^+(\alpha) = \int_0^\infty \left(1 + \frac{\eta_1}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (8)$$

$$\Phi_1^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} u_1(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2(x, b)\right] e^{i\alpha x} dx \quad (9)$$

$$\Phi_2^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{\eta_2}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (10)$$

ile Fourier dönüşümü tekniği uygulandığında ve şekilden de görülebilecek birinci ve üçüncü-türden sınır-koşulları, süreklilik bağıntıları, ayırıt ve radyasyon koşulları gözönüne alındığında problem aşağıdaki iki denklemin çözümüne indirgenmektedir.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\eta_2 \cos Kb + ik \frac{\sin Kb}{K} \\ iK & \eta_2 K \sin Kb + ik \cos Kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^+(\alpha) \\ \Phi_2^+(\alpha)/(\eta_2 - \eta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \eta_1 \cos Kb - ik \frac{\sin Kb}{K} \\ -1 & \eta_1 K \sin Kb + ik \cos Kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^-(\alpha) \\ \Phi_2^-(\alpha)/(\eta_2 - \eta_1) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{\alpha - k \cos \phi_o} \end{aligned} \quad (11)$$

Bu denklemlerde görülen terimler

$$M(\eta_j, \alpha) = \frac{\sin Kb}{K} - \frac{\eta_j}{ik} \cos Kb \quad (12)$$

$$N(\alpha) = M(\eta_2, \alpha) e^{iKb} \quad (13)$$

$$L(\alpha) = \frac{M(\eta_1, \alpha)}{M(\eta_2, \alpha)} \quad (14)$$

ile tanımlıdır. Bu denklemler “zayıf faktörizasyon kavramına dayalı” yöntem ile çözüldüğünde

$$\begin{aligned} M(\eta_1, \pm\alpha_m) &= 0 \quad , \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k) \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ M(\eta_2, \pm\beta_m) &= 0 \quad , \quad \Im m(\beta_m) > \Im m(k) \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

$$b_m = \frac{N^+(\beta_m)}{M'(\eta_2, \beta_m)L^+(\beta_m)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\beta_m + \beta_n} - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{\beta_m - k \cos \phi_o} N^-(k \cos \phi_o) \right] \quad (16)$$

$$d_m = \frac{N^+(\beta_m)}{M'(\eta_2, -\beta_m)L^+(\beta_m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\beta_m + \beta_n} \quad (17)$$

olmak üzere $\Phi_1^+(\alpha)$ için

$$\Phi_1^+(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N^-(k \cos \phi_o) N^+(\alpha) - N^+(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \beta_m} \quad (18)$$

çözümü elde edilir. Sonuç olarak kırınan alan

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \phi) &= -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2k \sin \phi \sin \phi_o e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\cos \phi + \cos \phi_o)} N^-(k \cos \phi_o) N^-(k \cos \phi) \right. \\ &\quad \left. k \sin \phi e^{-ikb \sin \phi} N^-(k \cos \phi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{\beta_m - k \cos \phi} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Kaynaklar

- [1]. Hurd R. A., "The Wiener-Hopf Hilbert method for diffraction problems", Can. J. Phys., 54(7), s.775-780, 1976.
- [2]. Rawlins A. D., "The solution of a mixed boundary value problem in the theory of diffraction by a semi-infinite plane", Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 346, s.469-484, 1975.
- [3]. Rawlins A. D. ve Williams E. W., "Matrix Wiener-Hopf factorization", Proc Quart. J. Mech. Appl. Math., 34, s.1-8, 1981.
- [4]. Daniele V.G., "On the factorization of Wiener-Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-26(4), s.614-616, 1978.
- [5]. Khrapkov A.A., "Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a non-symmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces", Prikl. Math. Mekh., 35, s.1879-1885, 1981.
- [6]. İdemen M., "A new method to obtain exact solutions of vector Wiener-Hopf equations", Z. Angew. Math. Mekh (ZAMM), 59, s.656-658, 1979.
- [7]. Abrahams I.D., "Scattering of sound by two parallel semi-infinite screens", Wave Motion, 9, s.289-300, 1987.
- [8]. Büyükaksoy A. ve Serbest A.H., "Matrix Wiener-Hopf factorization methods and applications to some diffraction problems", in Hashimoto, Idemen, Tretyakov (eds): Analytical and Numerical Techniques in Electromagnetic Wave Theory, Chpt. 6, Science House Tokyo Japan, 1993.