

# Dört Yüzlü Eleman Kalite Ölçütleri Üzerine Bir İnceleme ve Karşılaştırma

Engin YALÇIN<sup>1</sup>, A. Egemen YILMAZ<sup>1</sup>, Mustafa KUZUOĞLU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ankara Üniversitesi

Elektronik Mühendisliği Bölümü, Ankara

[eyalcin06@yahoo.com](mailto:eyalcin06@yahoo.com), [aevimaz@eng.ankara.edu.tr](mailto:aevimaz@eng.ankara.edu.tr),

<sup>2</sup>Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, Ankara

[kuzuoglu@metu.edu.tr](mailto:kuzuoglu@metu.edu.tr)

**Özet:** Bu çalışma kapsamında, ideal bir dört yüzlü eleman kasıtlı olarak bozularak, söz konusu elemanın kalitesindeki değişim incelenecektir. Bu amaçla, literatürde dört yüzlü elemanların kalitesinin hesaplanmasına yönelik olarak tanımlanmış 10 adet kalite ölçütünün her birinin; farklı tip bozunumlara (distortion) karşı ne kadar duyarlı olduğu, hesaplama süreleri gibi değerler ölçülecek, bu değerler üzerinden söz konusu ölçütler arasında bir performans karşılaştırması yapılmıştır. Çalışma kapsamında incelenen tüm ölçütler için elde edilen bulgular, karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

## 1. Giriş

Sonlu eleman yönteminde kullanılan ağ kalitesinin yüksek olması, elde edilen yaklaşık çözümün yüksek doğrulukta olmasında önemli bir faktördür. Dolayısıyla üretilen/kullanılacak olan ağın kalitesi, eleman şekli (iki boyutta üçgen, dörtgen, vb.; üç boyutta dört yüzlü, altı yüzlü, piramit, vb.) ve tipi (düğüm, kenar, facet ve hacim elemanları) her ne olursa olsun, bir takım ölçütler yardımı ile hesaplanmalıdır. Ağ kalitesi, ağı oluşturmada olan elemanların kalitelerine bağlı bir fonksiyon olarak ifade edilebilir. Bu nedenle literatürde, farklı eleman şekilleri için söz konusu elemanın ideale ne kadar yakın olduğuna dair bir takım ölçütlerin tanımlandığı birçok çalışma bulunmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmek istenilen problemlerde en önemli hususlardan biri, problem ilgi alanı için belirli mertebedeki boyutlara sahip elemanlar kullanılarak uygun bir ağın oluşturulmasıdır (örneğin elektromanyetik saçılma ve ışıma problemlerinde, eleman kenarlarının yaklaşık olarak 0.1λ mertebesinde olması tercih edilmektedir).

Dört yüzlü eleman (tetrahedral eleman veya tetrahedron); bütün düğüm noktalarının ve kenarlarının eş özellikli olması ve herhangi bir şekildeki bir hacmin, tamamen dört yüzlü elemanlar ile kolaylıkla doldurulabilmesi gibi topolojik özellikleri nedeniyle literatürde en yaygın kullanımı olan bir eleman şeklidir. Ancak, oluşturulan bütün elemanların şekillerinin düzgün olması, mümkün değildir. Dolayısıyla, elde edilen ağın kalitesinin ölçülmesi, yaygın bir ihtiyaçtır. Bu nedenle, çeşitli araştırmacılar tarafından, dört yüzlü bir elemanın ideal (yani eşkenar veya düzgün) bir dört yüzlü elemana ne kadar benzediğine dair bir takım ölçütler tanımlanmıştır.

## 2. Kalite Ölçütleri

Bu çalışmada [1],[2],[3] ve [4]'deki kalite ölçütleri temel alınarak kullanılmıştır. Bu ölçütlerden birincisi, dört yüzlü elemanın en kısa ve en uzun kenar uzunlukları oranına dayanan kalite ölçütüdür [1]. Söz konusu ölçüt, Denklem (1)'deki gibi düzenlenmiştir.

$$f_1 = \frac{L_{\max}}{L_{\min}} \quad (1)$$

Bu denklemdeki  $L_{\max}$  ve  $L_{\min}$  değerleri, dört yüzlü elemanın sırasıyla en uzun ve en kısa kenar uzunluklarıdır. Bu fonksiyonun değer kümesi 1 ile  $\infty$  arasında olup, çalışmada kullanılmak üzere aralık 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Yüksek kaliteli bir eleman için fonksiyon 1'e yakın değerler almaktadır. Bu çalışmada diğer kalite ölçütü olarak [2]'de tanımlanmış olan ve Denklem (2)'deki gibi düzenlenen ölçüt kullanılmıştır. Bu denklemdeki  $L_i$  dört yüzlü elemanın kenar uzunlukları,  $V$  ise hacmini ifade etmektedir. Bu fonksiyonun değer kümesi de 1 ile  $\infty$  arasındadır. Çalışmada kullanılmak üzere değer aralığı 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Yüksek kaliteli bir eleman için bu fonksiyon 1'e yakın değerler almaktadır. Bu çalışmada kullanılacak diğer bir kalite ölçütü ise [3]'de tanımlanmış olan ve Denklem (3)'teki gibi düzenlenmiş kalite ölçütüdür.

$$f_2 = \frac{\left( (1/6) \sum_{i=0}^5 L_i^2 \right)^{3/2}}{8.48528V} \quad (2)$$

$$f_3 = \frac{\sum_{i=0}^5 L_i^2 \sum_{i=0}^3 A_i^2}{V^2} \quad (3)$$

Denklem (3)'te yer alan  $L_i$ ,  $A_i$  ve  $V$  sırasıyla elemanın kenar uzunlukları, yüzey alanları ve hacmidir. Bu fonksiyon da 1 ile  $\infty$  arasında değer almakta olup, çalışmada kullanılmak üzere 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Yüksek kaliteli bir eleman için fonksiyon 1'e yakın değerler almaktadır. Çalışmamızda kullanılacak diğer kalite ölçütü ise [1]'de tanımlanan ve Denklem (4)'teki gibi düzenlenen kalite ölçütüdür.

$$f_4 = \frac{R}{3r} \quad (4)$$

Bu denklemdeki  $R$  dört yüzlü elemanı çevreleyen kürenin yarıçapı,  $r$  ise elemanın içinde yer alan kürenin yarıçapıdır. Bu fonksiyonun değer kümesi 0 ile  $\infty$  arasında olup, çalışmada kullanılmak üzere 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Yüksek kaliteli bir eleman için bu fonksiyon 1'e yakın değerler almaktadır. Bu çalışmada diğer bir kalite ölçütü olarak [1]'de tanımlanan kalite ölçütü kullanılmıştır. Söz konusu kalite ölçütü Denklem (5)'teki gibi düzenlenmiştir.

$$f_5 = \frac{L_{\max}}{2\sqrt{6}r} \quad (5)$$

Denklem (5)'teki  $L_{\max}$  elemanın kenar uzunluklarının en büyüğü,  $r$  ise elemanın içinde yer alan kürenin yarıçapıdır. Bu fonksiyon 1 ile  $\infty$  arasında değer almakta olup, çalışmada değer kümesi 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Yüksek kaliteli bir eleman için 1'e yakın değerler almaktadır. Diğer bir kalite ölçütü olarak ise Knupp tarafından tanımlanmış [1] kalite ölçütüdür. Kalite ölçütü Denklem (6)'daki gibi düzenlenmiştir.

$$f_6 = \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{3C_{\det}} \quad (6)$$

Bu denklemdeki  $T$  matrisleri bir dört yüzlü elemanın düğüm noktalarının koordinatlarından oluşmuş bir matris olup,  $C_{\det}$  ise  $T$  matrislerini oluşturan kenarların çarpımlarıdır. Bu fonksiyonun değer kümesi 0 ile 1 arasındadır. Yüksek kaliteli bir eleman için bu fonksiyon 1'e yakın değerler almaktadır. Bu çalışmada diğer kalite ölçütü olarak [1]'de tanımlanmış olan ve Denklem (2)'teki gibi düzenlenen ölçüt kullanılmıştır.

$$f_7 = \frac{3(J\sqrt{2})^{2/3}}{\frac{3}{2}(\bar{L}_0 \cdot \bar{L}_0 + \bar{L}_2 \cdot \bar{L}_2 + \bar{L}_3 \cdot \bar{L}_3) - (\bar{L}_0 \cdot -\bar{L}_2 + \bar{L}_0 \cdot \bar{L}_3 + -\bar{L}_2 \cdot \bar{L}_3)} \quad (7)$$

Denklem (7)'teki  $J$  elemanın üç kenarının çarpımları (*Jacobian*) ve  $L$  değerleri ise elemanın ilgili kenarlarıdır. Fonksiyon 1 ile  $\infty$  arasında değer almakta olup, çalışmada değer aralığı 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Yüksek kaliteli bir eleman için fonksiyon 1'e yakın değerler almaktadır. Bu çalışmada kullanılacak olan diğer bir ölçüt [1]'de tanımlanmış ve Denklem (8)'teki gibi düzenlenmiştir.

$$f_8 = \frac{R_s^3 \sqrt{2}}{12|V|} \quad (8)$$

Denklem (8)'de yer alan  $R$  dört yüzlü elemanı çevreleyen kürenin yarıçapı,  $V$  ise elemanın hacmidir. Bu fonksiyon 1 ile  $\infty$  arasında değer almakta olup, çalışmada değer kümesi 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Yüksek kaliteli bir eleman için fonksiyon 1'e yakın değerler almaktadır. Çalışmamızda kullandığımız diğer bir kalite ölçütü ise [1]'de tanımlanan ve Denklem (9)'daki şekli ile düzenlenmiş kalite ölçütüdür.

$$f_9 = \frac{J\sqrt{2}}{\lambda_{\max}} \quad (9)$$

Buradaki  $J$  elemanın üç kenarının çarpımları (*Jacobian*) ve  $\lambda_{\max}$  ise elemanın her bir düğüm noktasına ait üç kenar uzunluklarının çarpımları ile  $J$ 'nin maksimum olanıdır. Kalite ölçütü, 0 ile 1 arasında değerler almakta olup, yüksek kaliteli bir eleman için 1 değerini almaktadır. Çalışmada kullandığımız bir diğer kalite ölçütü [4]'te tanımlanan ve Denklem (10)'daki hali ile düzenlenen kalite ölçütüdür.

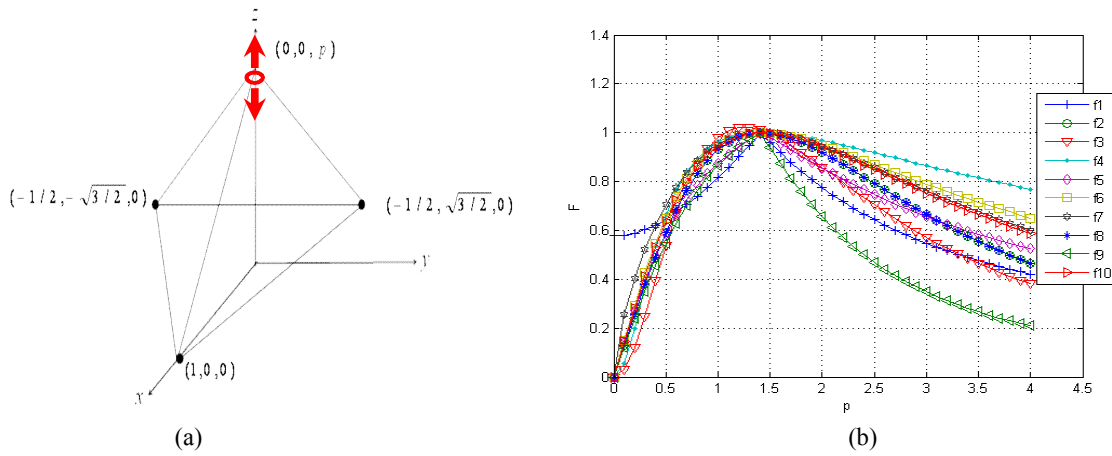
$$f_{10} = 1.8328208 \frac{V}{\left( \sum_{i=0}^5 L_i \right)^3} \quad (10)$$

### 3. Değişik Dört Yüzlü Elemanlar Üzerine Kalite Ölçütlerinin Uygulanması

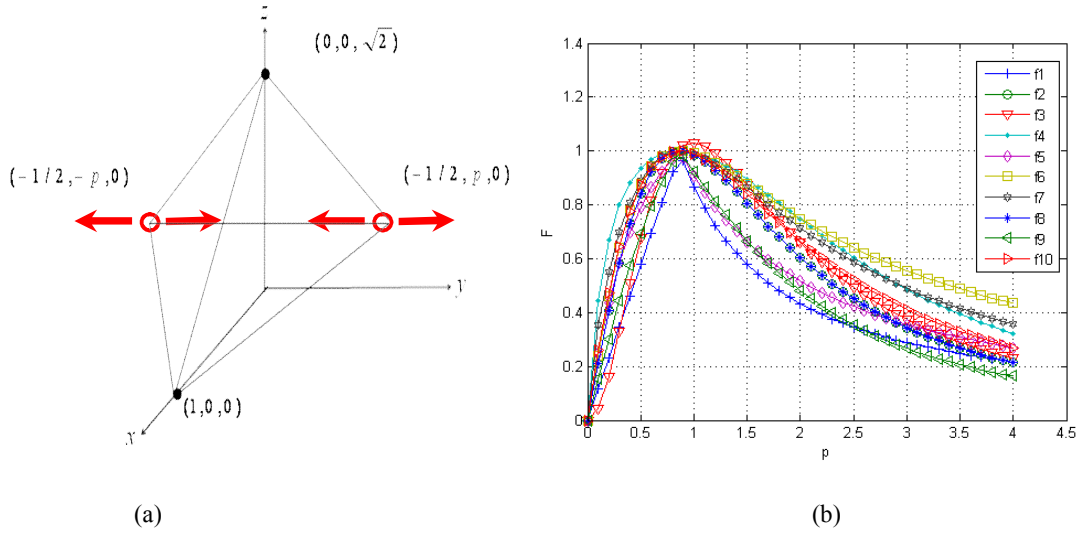
Bu bölümde, ideal dört yüzlü eleman üzerindeki bazı köşelerin koordinatlarında değişiklikler yapılarak elemanın şekli bozulmuş; Bölüm 2'de belirtilen kalite ölçütlerinin bu bozulmalara bağlı olarak aldığı değerler gözlemlenmiştir. İlk olarak ideal dört yüzlü eleman üzerindeki  $x,y,z$  koordinat düzlemindeki,  $(0,0,\sqrt{2})$  koordinatlarının oluşturduğu köşe üzerindeki  $z$ -doğrultusundaki değer,  $p$  gibi bir değişken kullanılarak değiştirilmiş (Şekil 1(a)) ve Bölüm 2'de yer alan kalite ölçütlerinin,  $p$  değerine göre değişimleri Şekil 1(b)'deki gibi elde edilmiştir.

İkinci analizde, ideal dört yüzlü elemanın  $x,y,z$  koordinat düzlemindeki  $(-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$  ve  $(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$  koordinatlarının oluşturduğu köşeler üzerindeki  $y$  doğrultusundaki değerler  $p$  gibi bir değişken kullanılarak değiştirilmiş (Şekil-2(a)) ve Bölüm 2'de belirtilen kalite ölçütlerinin  $p$ 'ye bağlı değişimleri elde edilmiştir (Şekil-2(b)).

Son analizde ise ideal dört yüzlü elemanın  $x,y,z$  koordinat düzlemindeki,  $(0,0,\sqrt{2})$  koordinatlarının oluşturduğu köşe üzerindeki  $x$  doğrultusundaki değer  $p_1$  gibi bir değişken ile  $y$  doğrultusundaki değeri ise  $p_2$  gibi bir değişken ile değiştirilerek; (Şekil-3) ve Bölüm 2'de belirtilen kalite ölçütlerinin  $p$ 'ye bağlı olarak değişimleri hesaplanmıştır. Bu analizin detaylı sonuçlarına, yer kısıtı dolayısıyla bildiride yer verilememiştir.



**Şekil 1.** Analiz 1 İçin (a) İdeal Dört Yüzlü Eleman Üzerindeki Değişim, (b) Değişime Bağlı Olarak Kalite Ölçütlerinin Değişimi



**Şekil 2.** Analiz 2 İçin (a) İdeal Dört Yüzlü Eleman Üzerindeki Değişim, (b) Değişime Bağlı Olarak Kalite Ölçütlerinin Değişimi

#### 4.Sonuç

Bu çalışma kapsamında 10 farklı kalite ölçütü ile üç farklı analiz yapılmıştır. Her bir analiz sonucunda 10 adet kalite ölçütünün köşe koordinatlarında değiştirilen  $p$  değerlerine bağlı olarak sonuçları elde edilmiştir. Analizlerde dört yüzlü elemanda  $p$  değerinin sıfır olduğu durumlarda sadece  $f_1$  kalite ölçütünün sıfır değeri almadığı tespit edilmiştir. Üç analizin de sonuçlarına bakıldığında kalite ölçütleri arasında çok büyük farklılıklar olmadığı görülmüştür. Sadece maksimum ve minimum kenar uzunluğuna bağlı olan  $f_1$  kalite ölçütünün çok başarılı olmadığı tespit edilmiştir. Gelecek çalışmalarda, ölçütlerin farklı bozulma tiplerine göre hassasiyetinin incelenmesi, söz konusu ölçütlerin karmaşıklık derecesi gibi özelliklerine göre de bir takım incelemeler yapılması hedeflenmektedir.

Daha önce tarafımızdan altı yüzlü eleman (hexahedral eleman veya hexahedron) kalite ölçütleri hakkında yapılmış benzer bir çalışmada [5], literatürdeki bütün altı yüzlü eleman ölçütlerini yanıtlan en az bir adet bozunum (*distortion*) tipi olduğu gözlemlenmiştir. Dört yüzlü eleman kalite ölçütlerinin yanılma oranlarının daha düşük olmasının başlıca sebepleri, dört yüzlü elemanın topolojik olarak altı yüzlü elemene göre çok daha basit bir eleman türü olması, elemanın ters döndüğünde de halen topolojik olarak geçerli bir eleman olarak kalması, bu nedenle olası bozunum türlerinin sayısının az olması şeklinde özetlenebilir.

#### Kaynaklar

- [1] Stimpson, C. J., vd, "The Verdict library reference manual", *Sandia National Laboratories Technical Report*, Available Online: <http://www.vtk.org/Wiki/images/6/6b/VerdictManual-revA.pdf>, 2007.
- [2] Yi-Jun Yang vd., "An algorithm for tetrahedral mesh generation based on conforming constrained Delaunay tetrahedralization", *Computers & Graphics*, cilt 29, s. 606-615, 2005.
- [3] Kuprat, A. vd., "Maintaining Tetrahedral Mesh Quality in Response to Time-dependent Topological and Geometrical Deformation", 6. International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation, LA-UR-98-1697, CONF-980769, 1998.
- [4] Sun S.-L. vd., "An Efficient Optimization Procedure for Tetrahedral Meshes by Chaos Search Algorithm", cilt 18, sayı 6, s. 796-803, 2003.
- [5] Yalcin, E., Yilmaz, A. E., Kuzuoglu, M., "Performance Comparison of Various Hexahedral Element Quality Metrics via Parametric Distortion of an Ideal Element", *International Journal of Computational Methods (IJCM)*, yayımlanmak üzere kabul edilmiştir.