

Mükemmel İletken Keyfi Kesitli Silindirik Cisimler için T Matrisi Yönteminin Regülerleştirilmesi

Mehmet Emin Geçer, Murat Enes Hatipoğlu, Fatih Dikmen
Gebze Teknik Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kocaeli

emingecer@gtu.edu.tr, hatipoglume@gtu.edu.tr, dikmen@gtu.edu.tr

Özet: Bu çalışmada dairesel silindirik cisimlere uygulanan T Matrisi Yönteminin regülerleştiricileri, keyfi kesitli silindirlere saçılma problemi için uygulanacaktır. Araştırmada regülerleştiricilerin saçıcı silindir kesitlerinin kapsadığı ve kesitleri kapsayan daireleri üzerindeki değerlerinden yararlanılmıştır. Tersine alınan matrislerin koşul sayılarının (terse alınma duyarlılıklarının) belirli özelliklere sahip kesitler için önemli ölçüde azaldığı gösterilecektir. Önerilen yaklaşımın artıları ve eksileri sunulacaktır.

Abstract: In this study, regularizers of the T Matrix Method applied on circular cylindrical objects are operated on the corresponding process for arbitrary cross section cylinders. The regulator values on inscribing and circumscribing circles of these cylinders are exploited in the investigation. It will be shown that the condition number of inverted matrices are dramatically decreased for cross sections with certain properties. Pros and cons of suggested approach are to be elaborated.

1. Giriş

Genişletilmiş Sınır Koşulu (GSK) yönteminin 2B veya 3B uygulamalarındaki radyal özfonksiyonlar, sırasıyla tam veya buçuklu indisleri ile duran ve dışarıdan dalgalar için kullanılan Bessel ve Hankel fonksiyonlarından oluşur. Bu silindirik veya küresel harmoniklerin sayısı, kurulan denklem sisteminin matrisinin kötü koşullandırılmış doğası [1,2] üzerinde önemli bir rol oynar. Bu sorunun üstesinden gelmek için bu radyal fonksiyonların ölçeklenmesi ya sonlu bir statik limit elde etme motivasyonu ile [3] ya da çözümlerin rezonans içeriğini korumak için uygun çarpanlara ayırma [4] ile önerilmektedir. Bu ölçeklemeler, bu radyal fonksiyonların indisleri sonsuza giderken asimptotik seri açılımlarının önde gelen terimlerinden kaynaklanmaktadır [5]. 2B sınır integral gösterilimlerinden kaynaklanan bir perspektif, dairesel silindirik bir sistemin saçılma ve iletim katsayılarının radyal fonksiyonlara bağımlılığını ve bunları dengeleyen asimptotik davranışa sahip olan regülerleştiriciler aracılığıyla ilgili saçılma matrislerinin regülerleştirilmesi için bir yordam ortaya koymaktadır [1]. Bu regülerleştiriciler, çok sayıda dairesel silindirik saçılma sisteminde regülerleştirilmiş özyinelemeli T-Matrisi uygulaması sırasında kullanılır [6]. Bu regülerleştirme, probleme dair matris gösterimi için ikinci türden bir doğrusal cebirsel denklem sistemine ulaşmayı amaçlayan motivasyonuyla yukarıda bahsedilen ölçeklemelerden ayrılır. Bu tür sistemler aracılığıyla elde edilen çözümler yuvarlatma hatalarına karşı bağıştıktır [2]. Silindirin kesiti daireden sapıtığında, daha önce önerilen regülerleştiricilerin geçerliliğinin araştırılması buradaki çalışmanın temel amacıdır.

2. Bilinmeyenlerin İntegral Denklem Formülasyonu Bakımından İncelenmesi

T-Matrisi formülasyonunda aranan bilinmeyenler, duran veya dışarıdan dalgalar için silindirik (2D) veya küresel (3D) harmonik serilerin katsayılarıdır. Rayleigh formülasyonu bakış açısından T-Matrisi, dikkate alınan arayüzlerin iki tarafındaki toplam alanın bu türden uygun harmonik açılımlarının ilgili sınır koşulunu karşılmasına izin verilerek oluşturulur. Saçıcı sınırını içten ve dıştan çevreleyen dairelerin veya kürelerin oluşturduğu kabuk, derin oluklu ve uzatılmış nesnelere olduğu gibi kalın ise, ortaya çıkan sistem kötü koşullu hale gelir [7]. Aslında sistemin durumu, bu kabuk sonsuz ince olduğunda, yani yüzey dairesel veya küresel olduğunda bile iyi değildir [8]. Temel neden, saçılma probleminin sınır integral formülasyonunun bilinmeyenleri, [9]'da 2B için yapıldığı gibi harmonik açılımın bilinmeyenleri ile ilişkilendirildiğinde ortaya çıkar:

$$\Phi^{\pm}(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m^{\pm}(\rho) W_m^{\pm}(k\rho) e^{jm\phi}; \lambda_m^{\pm}(\rho) = \int_C F(C) \tilde{W}_m^{\pm}(k, \rho') e^{-jm\phi'} dC \quad (1)$$

(1)'deki \pm işaretlemeleri sırasıyla saçılan alan Φ^{\pm} 'nin, arayüzlerin dışındaki ve içindeki açılımları için kullanılmaktadır. λ_m^{\pm} ise T matrisi formülasyonundaki ilgili bilinmeyen katsayılar ve W_m^{\pm} bunların radyal özfonksiyonları, yani Hankel ve Bessel fonksiyonlarıdır. Eğri üzerindeki toplam alan değerinin normal türevi olan

$F(C)$ Sınır İntegral Denklem (SİD) formülasyonlarının tipik bilinmeyenidir. Bunun, radyal özfonksiyonların asimptotik tersleri (Bessel ve Hankel) olan fonksiyonlar ve bunların normal türevlerinin empedans fonksiyonu $Z(C)$ ile ölçeklenmiş [9] doğrusal bir kombinasyonu olan \tilde{W}_m^\pm ile çarpıldığı (1) 'de olduğu gibi λ_m^\pm , böylece bir empedans türü sınır koşulu varsayımıyla, sınır eğrisi C üzerinde bir integral gösterilime sahiptir. C eğrisi yarıçapı a olan bir daire olduğunda, λ_m^\pm 'nin radyal bağımlılığı ortadan kalkar ve C üzerindeki fonksiyonların Fourier serisi açılımları integralin içerisinde yerleştirildiklerinde, bir dielektrik dairesel silindir [1] için aşağıdaki görünüme kavuşur:

$$\lambda_m^\pm = \frac{j\pi}{2} [F_m W_m^\mp(k_\pm a) - k_\pm G_m W_m^{\mp'}(k_\pm a)] \quad (2)$$

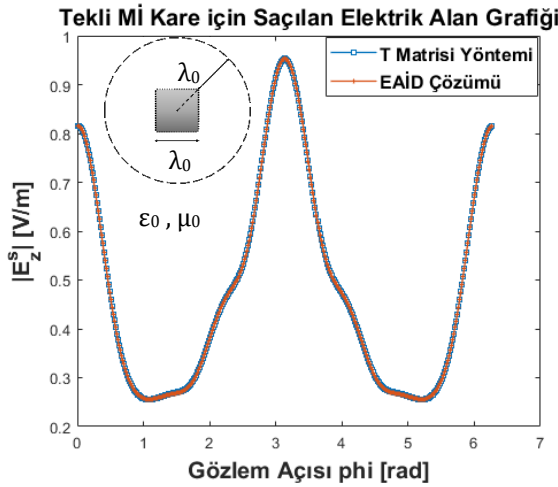
Burada F_m ve G_m , sırasıyla C üzerinde toplam alanın normal türevine ve kendisine ait olan Fourier katsayılarıdır ve üssü alınması argümana göre türevi ifade eder. Açıkça görülmektedir ki, keyfi bir eğri üzerinde (1)'deki gibi yazılan λ_m^\pm , m arttıkça asimptotik davranışlarından dolayı \tilde{W}_m^\pm 'nin hızlı artışı ve azalmasını barındırmaktadır. Benzer şekilde (2) 'de gördüğümüz gibi, eğri bir daire olduğunda da bu durum geçerli kalmaktadır.

3. Dairesel Silindirden Saçılma Problemi için Regülerleştiriciler ve Keyfi Kesitli Silindir için Genişletilmesi

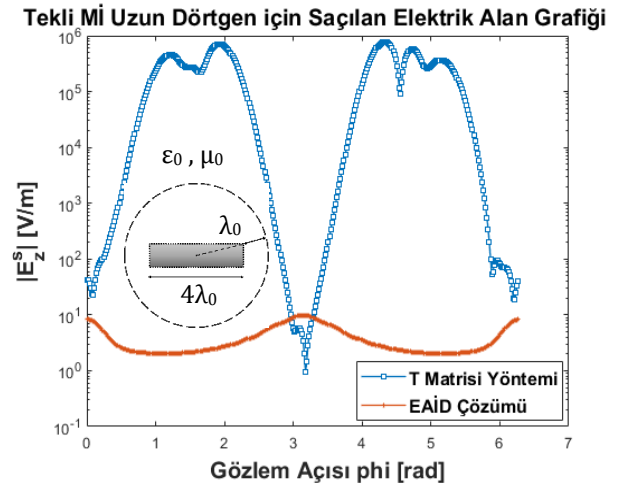
Dairesel silindirik dielektrik saçıcılar arasındaki iki temel etkileşim esnasında yani iki sınır eksantrik olarak katmanlandığında veya birbirine komşu olduğunda, ilgili saçılma matrislerinin kötü koşullandırılmış doğası, [1]'de regülerleştirilmiştir. Benzer bir regülerleştirme uygulaması dairesel komşu empedans silindirlerine de uygulanmıştır [2,10]. Bu çalışmalarda ortaya çıkan ve belirli bir kesme sayısında kesilen sonsuz doğrusal cebrik denklemlerin oluşturduğu matrisler, düzgün sınırlı koşul sayılarına sahip ikinci türden sistemler haline gelmiştir. Sonrasında, bu regülerleştiriciler, çoklu saçılma hesaplamalarında ortaya çıkan yinelemelerdeki tersi alınan matrislerin regülerleştirilmesiyle, T-Matrisi yönteminin özyinelemeli uygulaması için test edilmiştir [6]. Tekli saçılma problemi bakımından, dairesel bir silindir için regülerleştirilmiş çözüm, ilgili saçılma matrisinin köşegen yapısından dolayı saçılma katsayıları için analitik çözüm elde etmeye eşdeğerdir. Sınır çemberden farklılaştıkça bu matris yoğun bir matris halini alır. Dairesel sınırdan farklılaşmayı kontrol etmek için silindirik kesitin kutupsal koordinatlarda parametrizasyonu dikkate alınır [11]. Geçiş ve yansıma katsayıları için yeni saçılma problemlerine dairesel kesitli regülerleştiricilerle aynı yapıdaki regülerleştiricileri uygulanması amaçlanmaktadır. Bu regülerleştiriciler sabit yarıçapla kurulduğundan, yeni regülerleştiricileri saçıcı eğrisini içeren kabuğun iç veya dış sınırlarıyla ilişkilendirme zorunluluğuyla karşı karşıya kalınır.

4. Nümerik Sonuçlar

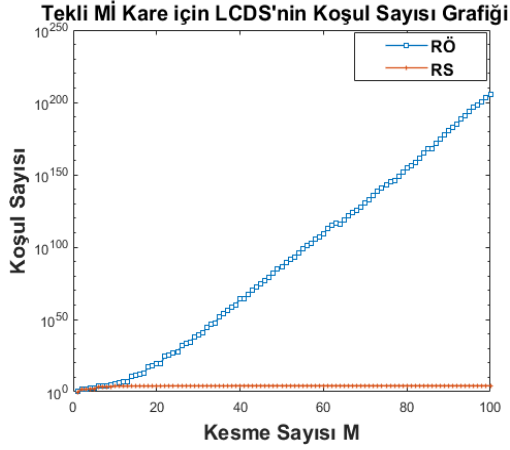
Birim genlikli, x yönünde ilerleyen düzlem dalga aydınlatması altında, T-Matrisi yönteminin regülerleştirilmesi ile çözülen boş uzaydaki mükemmel elektrik iletken tekli keyfi kesitli silindirden TM saçılma problemi, [12]'deki elektrik alan integral denklemi (EAİD) çözümleri ile sağlanması yapılarak işlenmiştir (Şekil 1a,b). Ele alınan iki kesite dair sonuçlardan 1 dalga boyu kenar uzunluklu kare Şekil 1a-b, kısa kenarı 1 dalga boyu uzunluğunda ve uzun kenarı bunun 4 katı uzunluklu dörtgen Şekil 2a-b içinde konu edilmiştir.



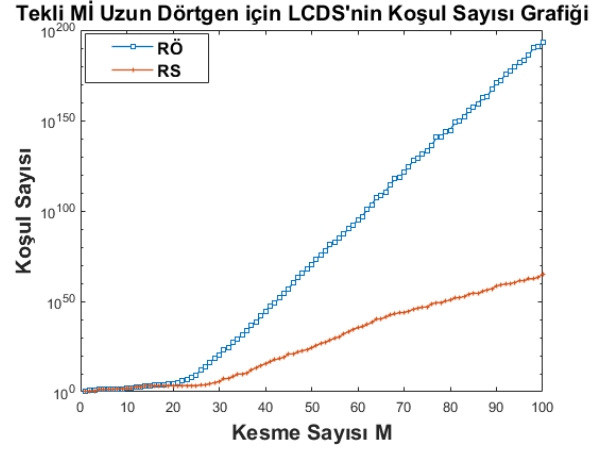
Şekil 1a. λ_0 kenar uzunluklu Mükemmel İletken kare için saçılan elektrik alan grafiği



Şekil 1b. λ_0 kısa kenar uzunluklu Mükemmel İletken uzun dörtgen için logaritmik ölçekte saçılan elektrik alan grafiği



Şekil 2a. Bir kenarı λ_0 olan mükemmel iletken kareden saçılma problemi için T Matrisi Yönteminde ortaya çıkan LCDS'nin logaritmik ölçekte koşul sayısı grafiği



Şekil 2b. Uzun kenarı $4\lambda_0$ olan mükemmel iletken uzun dörtgenden saçılma problemi için T Matrisi Yönteminde ortaya çıkan LCDS'nin logaritmik ölçekte koşul sayısı grafiği

Bu sonuçlara göre cisimlerden aşgari 1 dalga boyu uzaktaki kapsayan çember üzerindeki saçılan alanlar karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara varılırken dairesel problemin [1,2] regüleleştiricileri (DPR), cisimleri kapsar aşgari çember yarıçapını kullanmıştır. Bu regüleleştirme öncesi (RÖ) ve sonrası (RS) elde edilen birinci ve ikinci türden lineer cebrik denklem sistemlerine (LCDS) dair matrislerin koşul sayıları Şekil 2a ve 2b'de azalmıştır. Ancak bu davranışlardan sadece kare için RS-LCDS 2. türden LCDS tipik özelliklerini sergilemiştir, yani koşul sayısı düzgün sınırlı kalmıştır. Hem elde edilen saçılan alanlar hem de ilgili LCDS özellikleri sayesinde, T-Matrisi yönteminin dairesel simetriden uzak olmayan saçıcılar için geçerli kaldığı [7] bir kez daha ortaya konmuştur. Yine de DPR yerine (1)'deki integralin daire dışındaki eğriler hesaba katılarak analizi ile geliştirilecek bir regüleleştiricinin geliştirilme gereksinimi ortadadır ve ilgili çalışmaların sonraki safhasına işaret etmektedir.

Kaynaklar

- [1]. Dikmen F., Sever E., Vatansever S., ve Tuchkin Y. A., "Well-conditioned algorithm for scattering by a few eccentrically multilayered dielectric circular cylinders," Radio Sci., cilt.50, no.2, s.99–110, 2015.
- [2]. Sever E., Dikmen F., Tuchkin Y. A., ve Sabah C., "A numerically stable algorithm for scattering from several circular cylinders including metamaterials with different boundary conditions," Optik (Stuttg.), 2018.
- [3]. Vico F., Ferrando M., Greengard L., ve Gimbutas Z., "The Decoupled Potential Integral Equation for Time-Harmonic Electromagnetic Scattering," Commun. Pure Appl. Math., 2016.
- [4]. Stout B., Auger J. C., ve Devilez A., "Recursive T matrix algorithm for resonant multiple scattering: applications to localized plasmon excitations," J. Opt. Soc. Am. A, 2008.
- [5]. Abramowitz M. ve Stegun I. A., Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables Applied mathematics series. 1970.
- [6]. Hatipoglu M. E., Dikmen F., Sever E., ve Tuchkin Y. A., "Numerical Stabilization of Recursive T Matrix Method in 2D for TM-z Scattering from Circular Boundaries," Proceedings of International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, DIPED, 2018.
- [7]. Chew W. C., Waves and Fields in Inhomogenous Media. Wiley-IEEE Press 1999.
- [8]. Ivanov E. A., Diffraction of Electromagnetic Waves from Two Bodies. Rusçadan çeviri, NASA TTF-597. Nauka i Tekhnika, Minsk 1968.
- [9]. Bates R. H. T., "Analytic Constraints on Electromagnetic Field Computations," IEEE Trans. Microw. Theory Tech., 1975.
- [10]. Sever E., Dikmen F., Suvorova O. A., ve Tuchkin Y. A., "An analytical formulation with ill-conditioned numerical scheme and its remedy: Scattering by two circular impedance cylinders," Turkish J. Electr. Eng. Comput. Sci., 2016.
- [11]. Güler S., Önel C., Ergül Ö., Sever E., Dikmen F., ve Tuchkin Y.A., "Modified superformula contours optimized via genetic algorithms for fastly converging 2D solutions of EFIE," 2016 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, APSURSI 2016 - Proceedings, 2016.
- [12]. Sever E., Dikmen F., ve Tuchkin Y. A., "Superalgebraically Converging Galerkin Method for Electromagnetic Scattering by Dielectric Cylinders," Radio Sci., 2017.