

Laplace Denklemi Çözümünde Sonlu Farklar ve Rastgele Yürüyüş Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Fadıl KUYUCUOĞLU*

* Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
MANİSA
fadil.kuyucuoglu@cbu.edu.tr

Özet: Bu çalışmada, iki boyutlu Laplace denkleminin nümerik çözümleri incelenmiştir. Problem geometrisi, elektrik potansiyelleri bilinen 4 iletkenle oluşan, z ekseninde sonsuz uzun iki boyutlu kapalı bir karesel bölge olarak ele alınmıştır. Öncelikle çözüm bölgesinde bir ağ oluşturularak ayrıklaştırma işlemi yapılarak, her bir düğüm noktası için, sonlu fark yöntemi ile fark denklemleri elde edilmiş ve doğrusal bir denklem seti oluşturulmuştur. Ardından Gauss-Siedel metodu ile bilinmeyen potansiyeller için iteratif şekilde çözüm elde edilmiştir. Aynı problem rastgele yürüyüş metodu kullanılarak da çözülmüş ve sonuçlar gerçek çözüm ifadesiyle karşılaştırılıp, nümerik tablo ve potansiyel grafikleri ile sunulmuştur.

Abstract: In this study, numerical solutions of two dimensional Laplace equation are analysed. Problem geometry is a closed square region with 4 conducting walls and infinitely long in z axis with known electric potentials. Firstly geometry is meshed for discretization process, after that difference equations are written for each node and a linear equation set is obtained. Afterwards Gauss-Siedel method is utilized to find unknown potentials iteratively. Same problem is analyzed using random walk method and results are compared with the exact solutions and presented with numerical tables and figures.

1. Giriş

Kısmi diferansiyel denklemler mühendislikte çokça ele alınan problemlerden birisidir. Kısmi diferansiyel denklem formunda olan Laplace denklemi de akışkanlar mekaniği [1], ısı akışı problemleri [2] ve elektromanyetikte [3] sıkça karşılaşılan denklemlerden biri olarak karşımıza çıkmaktadır. Literatürdeki çalışmalarda yük ve potansiyel dağılımı, elektrik alan, kapasitans hesaplamalarında sıklıkla Laplace denkleminin çözümü ele alınmıştır [4]. Bu çalışmada, elektrik potansiyelleri bilinen 4 iletkenle oluşan, z ekseninde sonsuz uzun iki boyutlu kapalı bir karesel bölgede analiz yapılmıştır. Üst kısımda bulunan iletkenin potansiyeli belli bir değerde iken, diğer sınırlarda potansiyel sıfır seçilmiştir. İç bölgedeki elektrik potansiyel ifadesini bulmak için Laplace denklemi ilk olarak, x ve y değişkenlerine göre kısmi diferansiyel denklem olarak yazılmıştır. Dirichlet tipi sınır koşulları yazıldıktan sonra, çözüm bölgesinde bir ağ oluşturularak ayrıklaştırma işlemi yapılır. Her bir düğüm noktası için, fark denklemleri elde edilmiş ve doğrusal bir denklem seti oluşturulmuştur. Ardından Gauss-Siedel metodu ile bilinmeyen potansiyeller iteratif şekilde yerine yazılarak çözüm elde edilmiştir.

Kullanılan diğer bir nümerik yöntem de rastgele yürüyüş metodudur. Bu metotta, ayrıklaştırma yapılan her bir düğüm üzerinde rastgele bir yön seçilerek, 4 yönden birine doğru bir yürüyüş yapılır. Ulaşılan düğüm noktası için tekrar rastgele bir yön seçilir ve bu işlem sınır bölgelerine gelinceye kadar devam eder. Sınır bölgesine gelindiğinde bu sınırdaki potansiyel kayıtlı edilir. Rastgele yürüyüş sayısı kadar işlem yapıldığında, ulaşılan sınır potansiyel değerlerinin aritmetik ortalaması, o düğüm noktasının potansiyel değeridir.

Her iki çözümün doğruluğunu belirlemek için gerçek çözümde verilen sonsuz toplam ifadesiyle karşılaştırma yapılmıştır. Her bir düğümdeki potansiyelin hesaplanmasındaki yapılan nümerik hata da tablo olarak sunulmuştur. Yüzeysel ve kontur potansiyel dağılımları ayrı ayrı gösterilmiştir. Sonlu farklar çözümünün daha yüksek doğrulukta sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

2. Materyal ve Metot

Sonlu farklar metodu incelendiğinde; problem geometrisi kullanılarak 2 boyutta Laplace denklemi, x ve y değişkenlerine bağlı olarak yazıldığında, (1) elde edilir.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

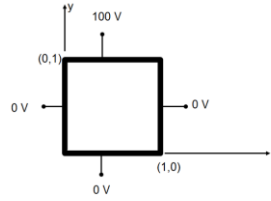
Daha sonra sınır koşulları ile belirli bir bölgede çözüm elde edilmeye çalışılmıştır. Bu sınır koşulları yazıldığında

$$U = 100V (x, y = 1), U = 0V (x, y = 0), U = 0V (x = 0, y), U = 0V (x = 1, y) \quad (2)$$

ifadesi elde edilir. Burada U, bilinmeyen potansiyeldir. Sınırlardaki potansiyeller Dirichlet sınır koşulları ile verilmiştir. Öncelikle problem geometrisi, ağ yapısı gereği hücelere ayrılır. Ardından, diferansiyel denklem merkezi farklar yöntemi ile (3) kullanılarak sonlu fark denkleminde dönüştürülür. Burada i ve j indisleri x ve y eksenindeki her bir düğüm noktasını belirtmektedir.

$$U_{i,j} = \frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{4} \quad (3)$$

Her bir düğüm noktası için, (3) kullanılarak bir lineer denklem sistemi oluşturulur. Ardından da bilinmeyen potansiyel değerleri Gauss-Siedel yöntemi ile iteratif olarak bulunur.



Şekil 1. Problem Geometrisi

Problem geometrisi Şekil 1'de verilmiştir. Köşeleri (0,0), (0,1), (1,0) ve (1,1) koordinatlarında bulunan karesel bölgede, kenarlar mükemmel iletken ve z ekseninde sonsuz uzun yapılardır. Her bir kenarın potansiyeli belirtilmiştir. Nümerik çözümde, Gauss-Siedel metodu ile 500 iterasyon sonrası sonuçlar elde edilmiştir. Rastgele yürüyüş metodunda ise, aynı ayıklama kullanılarak, her bir düğüm noktası için 2000 rastgele yürüyüş alınarak, sınırlara ulaşıldığında o sınırdaki potansiyeller toplanarak, ilgili düğüm noktasının potansiyeli aritmetik ortalama ile elde edilmiştir (4).

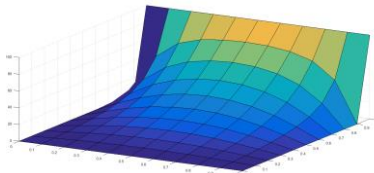
$$U(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M=2000} f(x'_i + y'_i) \quad (4)$$

Bu iki metodun sonuçları da gerçek çözümle karşılaştırılmıştır. (5) ile verilen gerçek çözüm ifadesinde a=b=1 ve $V_0=100$ V olarak alınmıştır.

$$U(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin(n\pi x/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \sinh(n\pi y/a) \quad (5)$$

3. Nümerik Sonuçlar:

Probleme Gauss-Siedel Metodu uygulandığında, 500 iterasyon sonucu hücre aralığı olarak da 0.1 alınarak çözüm elde edilmiştir. Elektrik potansiyel dağılımının yüzeysel ve kontur dağılımı sırasıyla Şekil 2(a) ve (b)'de verilmiştir. Ardından rastgele yürüyüş metodu kullanılarak, her bir düğüm noktası için 2000 rastgele yürüyüş sayısı seçilerek potansiyeller elde edilmiş ve Şekil 2(c) ve (d)'de sunulmuştur.



Şekil 2(a). Sonlu Farklar ve Gauss-Siedel Metodu ile elde edilen potansiyel dağılımı

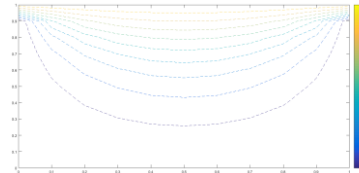
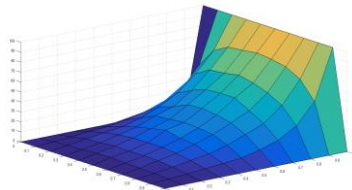


Figure 2(b). Sonlu Farklar ve Gauss-Siedel Metodu ile elde edilen potansiyelin kontur dağılımı



Şekil 2(c). Rastgele yürüyüş metodu ile elde edilen potansiyel dağılımı

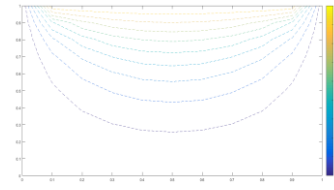
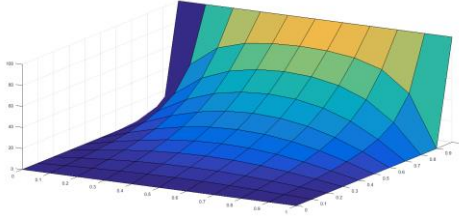
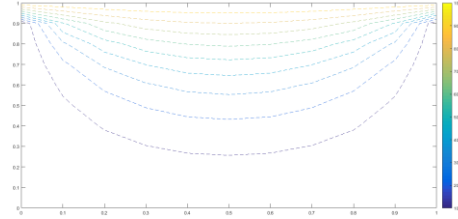


Figure 2(d). Rastgele yürüyüş metodu ile elde edilen potansiyelin kontur dağılımı



Şekil 2(e). Toplam ifadesi ile elde edilen potansiyel dağılımı



Şekil 2(f). Toplam ifadesi ile elde edilen potansiyelin kontur dağılımı

Son olarak da toplam ifadesi ile elde edilen potansiyel dağılımları da Şekil 2(e) ve (f)'de gösterilmiştir. Bu şekiller elde edilirken, 200 terim toplamı alınmıştır. Bu şekiller incelendiğinde, hepsinde 0 V potansiyelindeki kenarlara yaklaştıkça, potansiyel değerleri de 0 V'a yaklaşırken, 100 V potansiyelindeki kenara yakın bölgedeki potansiyeller de bu değere yaklaşmaktadır.

Uygulanan metotların doğruluğunu anlamak için her bir düğüm noktasının potansiyel değerinin gerçek çözüm değerleri ile karşılaştırılmış ve sonlu fark metodu sonuçlarının daha doğru olduğu görülmüştür. Rastgele yürüyüş metodu sonuçları ile sonlu fark metodunun arasındaki potansiyel değerler arasındaki farkları anlamak adına bağıl hata değerleri elde edilmiş ve Tablo 1'de verilmiştir. Bu değerler $\beta = (V_{\text{rastgele}} - V_{\text{sonlu}}) / V_{\text{sonlu}}$ eşitliği ile bulunmuş olup, bağıl hata değerlerinin her bir düğüm noktası için küçük olduğu görülmüştür.

Tablo 1. Bağıl hata değerleri (β)

Pozisyon	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9
y=0.1	0.3594	-0.0185	-0.1262	0.1914	0.1206	-0.0311	0.1518	0.1958	-0.0469
y=0.2	0.0133	0.2515	-0.0760	-0.0612	0.1371	0.0307	0.0979	-0.0091	-0.0296
y=0.3	-0.0615	-0.1037	-0.0408	0.0887	0.0424	-0.1385	-0.1377	-0.1037	0.0700
y=0.4	0.0489	-0.0051	0.0131	-0.0010	0.0445	-0.0128	0.0751	-0.0611	-0.0213
y=0.5	-0.0359	-0.0417	-0.0587	0.0393	0.0310	0.0100	0.0065	-0.0320	0.0426
y=0.6	-0.0768	0.0180	0.0069	0.0035	0.0213	-0.0327	0.0310	0.0316	0.1185
y=0.7	-0.0165	-0.0112	-0.0224	-0.0168	0.0091	0.0154	0.0087	0.0461	-0.0612
y=0.8	-0.0570	0.0097	0.0028	-0.0010	-0.0216	0.0181	-0.0225	-0.0068	0.0107
y=0.9	-0.0051	0.0283	-0.0174	0.0216	0.0177	0.0076	0.0032	0.0135	0.0052

4. Sonuçlar

Sonlu farklar yöntemi ve rastgele yürüyüş yöntemleri kullanılarak, Laplace denkleminin iki boyutta nümerik çözümü yapılmıştır. Gerçek çözüm ile karşılaştırılmıştır. Her iki çözüm için potansiyel dağılımları grafik olarak verilmiştir. Yapılan bağıl hata da tablo olarak sunulmuş ve rastgele yürüyüş metodu sonuçlarının sonlu fark metoduna yaklaştığı görülmüştür. Kullanılan metotlar ile daha büyük ve karmaşık geometrilerin çözümü çok daha kolay ve etkili bir şekilde yapılabilmektedir.

5. Kaynaklar

- [1]. Comiskey, P. M., & Staszal, C. (2021). Hydrodynamic focusing in porous media and its ramifications on the critical penetration depth. *Physics of Fluids*, 33(1), 012103.
- [2]. Hozejowska, S., Kaniowski, R., & Pastuszko, R. (2021). Application of the Trefftz method for pool boiling heat transfer on open microchannel surfaces. *Heat Transfer Engineering*, 1-13.
- [3]. Kahlaf, S. J., & Mhassin, A. A. (2021, March). Numerical Solution of a Two-Dimensional Laplace Equation with Dirichlet Boundary Conditions. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1818, No. 1, p. 012193). IOP Publishing.
- [4]. Gholizadeh, M., Zare, M., & Hosseini, S. E. (2021). An analytical charge-based capacitance model for double-gate tunnel FETs. *Superlattices and Microstructures*, 152, 106836.